Oppgave 1

La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (\sqrt{5}, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (-\sqrt{5}, 0)$ og der summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 6.

1. Gi likningen til $\mathcal{E}$.
2. Finn en parametrisert kurve som går over hele $\mathcal{E}$.

Løsning

Vi vet at $|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| + |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 6 = 2a$, så $a = 3$. Sentrum av ellipsen er $\frac{\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1}{2} = (0, 0)$. Endelig vi vet at $b^2 + (\sqrt{5})^2 = a^2$, så $b^2 + 5 = 9$ og derfor $b = 2$. Da likningen til $\mathcal{E}$ er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\,.$$

En parametrisert som går over hele $\mathcal{E}$ kan være

$$\overrightarrow{r}(t) = (3\cos(t), 2\sin(t)) \qquad \text{for } t \in [0, 2\pi]\,.$$

Oppgave 2

La $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ være definert på intervallet $I = \mathbb{R}$. Bestem funksjonen $f(x)$ slik at følgen $\{f_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$. Bevis at $\{f_n(x)\}$ konvergerer også uniformt mot $f(x)$.

Løsning

Gitt en $a \in \mathbb{R}$ vi har at

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty} ae^{-na^2} = 0\,.$$

Så $f_n(x) \to f(x) = 0$ punktvis på $\mathbb{R}$.

For å sjekke uniformt konvergens vi må beregne

$$\mathbf{d}(f_n(x), f(x)) = \max_{x\in\mathbb{R}}\{|f_n(x) - f(x)|\} = \max_{x\in\mathbb{R}}\{|f_n(x)|\}\,.$$

Først finner vi de kritiske punktene,

$$f_n'(x) = e^{-nx^2} - 2nx^2e^{-nx^2} = e^{-nx^2}(1 - 2nx^2) = 0 \qquad 1 - 2nx^2 = 0 \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}\,.$$

Men

$$f_n(\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-n(\pm\frac{1}{\sqrt{2n}})^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}\,,$$

så

$$\mathbf{d}(f_n(x), f(x)) = \left|\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Derfor

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{d}(f_n(x), f(x)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} = 0\,,$$

så $f_n \to f = 0$ konvergerer uniformt.

Oppgave 3

a) Bevis at rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$$

konvergerer.

b) Finn summen av rekkene i **a**).

Løsning

Vi skal bevise absolutt konvergens.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}}{(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)}{2}}{n} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{OK!}\,,$$

og

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)2}{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)2}{(n+1)^2} = 0 \qquad \textbf{OK!}\,.$$

Nå skal vi regne summen. Først ta Maclaurinrekker til $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^n$ for $-1 < x < 1$. Derfor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^n \qquad \text{for} -1 < x < 1\,,$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \text{for} -1 < x < 1\,,$$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{2}{2+x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n \qquad \text{for} -2 < x < 2\,,$$

$$\frac{2x}{2+x} = x\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^{n+1} \qquad \text{for} -2 < x < 2\,,$$

$$\left(\frac{2x}{2+x}\right)' = \frac{2(2+x)-2x}{(2+x)^2} = \frac{4}{(2+x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^n} x^n \qquad \text{for} -2 < x < 2\,,$$

$$\left(\frac{4}{(2+x)^2}\right)' = \frac{-8}{(2+x)^3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n} x^n \qquad \text{for} -2 < x < 2\,,$$

så

$$\frac{-8}{(2+1)^3} = \frac{-8}{27} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n} 1^n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}\,.$$

Nå ta Maclaurinrekker til $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for alle x, derfor

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{for alle } x\,,$$

$$e^{2x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \qquad \text{for alle } x\,,$$

$$xe^{2x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} \qquad \text{for alle } x\,,$$

$$(xe^{2x})' = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1+2x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)x^n}{n!} \qquad \text{for alle } x\,,$$

da

$$e^2(1+2) = 3e^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)1^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}\,.$$

Oppgave 4

La $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$.

a) Finn Maclaurinrekken til $f(x)$.

b) Finn $f^{(5)}(0)$ (den femtederiverte til $f(x)$ i punktet $x = 0$).

Løsning

Ta Maclaurinrekker til $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^n$, derfor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$$

$$\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{2}{(1+x)^3} = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^n n(n+1) x^{n-2}$$

$$\frac{2x^2}{(1+x)^3} = x^2 \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^n n(n+1) x^{n-2} = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^n n(n+1) x^n$$

$$\frac{x^2}{(1+x)^3} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2} x^n \,.$$

Nå vi vet at

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,,$$

så

$$a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,,$$

$$f^{(5)}(0) = 5! a_5 = 120 \cdot \frac{(-1)^5 5 \cdot 6}{2} = -1800\,.$$

Oppgave 5

Finn alle komplekse tall z som tilfredsstiller

$$z^2 = (1 + i\sqrt{3})^3\,.$$

Løsning

Først vi regne

$$|1 + i\sqrt{3}| = 2 \qquad \text{og} \qquad \arg\,(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\,,$$

derfor

$$|(1+i\sqrt{3})^3| = 2^3 \qquad \text{og} \qquad \arg\,((1+i\sqrt{3})^3) = 3\frac{\pi}{3} = \pi\,.$$

Så

$$|z^2| = |z|^2 = 2^3 \qquad \text{og} \qquad \arg\,(z^2) = 2\arg(z) = \pi + 2\pi k \qquad \text{for } k \in \mathbb{Z}\,,$$

og derfor

$$|z| = \sqrt{8} \qquad \text{og} \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \pi k \qquad \text{for } k \in \mathbb{Z}\,.$$

De er bare to tilfeller $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ og $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$, derfor løsningene er

$$z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = \sqrt{8}i \qquad \text{og} \qquad z_2 = \sqrt{8}(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -\sqrt{8}i\,.$$

Oppgave 6

a) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = 0\,.$$

b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)\,,$$

med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Løsning

Den karakteristiske ligningen er $r^2 + 2r + 2 = 0$, med røtter $r_1 = -1 + i$ og $r_2 = -1 - i$, da løsningene er på formen

$$y_h(x) = e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x))\,.$$

Nå vi tipper at en løsingen av $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$ er på formen

$$y_p(x) = C\cos(2x) + D\sin(2x)\,,$$

med

$$y_p'(x) = -2C\sin(2x) + 2D\cos(2x) \qquad \text{og} \qquad y_p''(x) = -4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)\,.$$

Derfor

$$-4C\cos(2x)-4D\sin(2x)+2(-2C\sin(2x)+2D\cos(2x))+2(C\cos(2x)+D\sin(2x)) =$$

$$= (-2C+4D)\cos(2x)+(-2D-4C)\sin(2x) = \sin(2x)\,,$$

så

$$-2C+4D=0\,\&\,-2D-4C=1 \qquad \Longrightarrow \qquad C=\frac{-1}{5}\,\&\,D=\frac{-1}{10}\,.$$

Da

$$y(x)=y_p(x)+y_h(x)=\frac{-1}{5}\cos(2x)-\frac{1}{10}\sin(2x)+e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))\,.$$

Nå vi vurderer initiallbetingelser, da

$$y(0)=\frac{-1}{5}+A=1 \qquad \Longrightarrow \qquad A=\frac{6}{5}\,.$$

$$y'(x)=\frac{-2}{5}\sin(2x)-\frac{1}{5}\cos(2x)-e^{-x}(\frac{6}{5}\cos(x)+B\sin(x))+e^{-x}(-\frac{6}{5}\sin(x)+B\cos(x))\,,$$

og

$$y'(0)=-\frac{1}{5}-\frac{6}{5}+B=0 \qquad \Longrightarrow \qquad B=\frac{7}{5}\,,$$

så

$$y=\frac{-1}{5}\cos(2x)-\frac{1}{10}\sin(2x)+e^{-x}(\frac{6}{5}\cos(x)+\frac{7}{5}\sin(x))\,.$$

Oppgave 7

Finn potensrekkeløsningen $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensiallikningen

$$y''+xy'+2y=0\,,$$

med initialbetingelser $y(0)=1$ og $y'(0)=2$.

Løsning

La $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ og $y''=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$, da

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}+x\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right)+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0\,,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n=0\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0\,,$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^n = 0\,,$$

$$2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n n + 2a_n)x^n = 0\,,$$

$$2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+2}(n+2)(n+1) + (n+2)a_n)x^n = 0\,,$$

derfor

$$2a_2 + 2a_0 = 0 \qquad \text{og} \qquad a_{n+2}(n+1) + a_n = 0\,,$$

så

$$a_2 = -a_0 \qquad \text{og} \qquad a_{n+2} = \frac{-a_n}{n+1}\,.$$

På grunn av initialbetingelsene vi har at $a_0 = 1$ og $a_1 = 2$. Da vi kan se at

$$a_0 = 1 \qquad \text{og} \qquad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$$

og

$$a_1 = 2 \qquad \text{og} \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1} n!}\,.$$

Oppgave 8

La $y(x)$ være løsningen av

$$y' = x^2 y^2 \qquad \text{med} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk forbedret Eulers metode med $h = 0.1$ til å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1 \qquad \text{og} \qquad x_2 = 0.2\,.$$

(Bruk kun 4 desimaler i utregningene dine.)

Løsning

La $y' = x^2 y^2 = f(x, y)$ med $y(0) = 1 = y_0$ og $x_0 = 0$.

$$x_1 = x_0 + 0.1 = 0.1 \qquad \text{og} \qquad u_1 = 1 + 0.1 \cdot f(0, 1) = 1\,,$$

$$y_1 = y_0 + 0.1 \cdot \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, u_1)}{2} = 1 + 0.1 \cdot \frac{f(0, 1) + f(0.1, 1)}{2} = 1 + \frac{0 + (0.1)^2 1^2}{2} = 1.005\,,$$

$$x_2 = x_1 + 0.1 = 0.2 \qquad \text{og} \qquad u_2 = y_1 + 0.1 \cdot f(x_1, y_1) = 1.005 + 0.1 \cdot (0.1)^2 (1.005)^2 = 1.006\,,$$

$$y_2 = y_1 + 0.1 \cdot \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, u_2)}{2} = 1.005 + 0.1 \frac{0.0101 + 0,0405}{2} = 1.0075\,.$$