Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102/6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen: Eduard Ortega

Tlf: 46760087

Eksamensdato: 29. mai 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.
- Alle 8 oppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (\sqrt{5}, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (-\sqrt{5}, 0)$ og der summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 6.

a) Gi likningen til $\mathcal{E}$.

b) Finn en parametrisert kurve som går over hele $\mathcal{E}$.

Oppgave 2 La $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ være definert på intervallet $I = \mathbb{R}$. Bestem funksjonen $f(x)$ slik at følgen $\{f_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$. Bevis at $\{f_n(x)\}$ konvergerer også uniformt mot $f(x)$.

Oppgave 3

a) Bevis at rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$$

konvergerer.

b) Finn summen av rekkene i **a**).

Oppgave 4 La $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$.

a) Finn Maclaurinrekken til $f(x)$.

b) Finn $f^{(5)}(0)$ (den femtederiverte til $f(x)$ i punktet $x = 0$).

Oppgave 5 Finn alle komplekse tall z som tilfredsstiller

$$z^2 = (1 + i\sqrt{3})^3 .$$

Oppgave 6

a) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = 0\,.$$

b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)\,,$$

med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 7 Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensiallikningen

$$y'' + xy' + 2y = 0\,,$$

med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$.

Oppgave 8 La $y(x)$ være løsningen av

$$y' = x^2 y^2 \qquad \text{med} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk forbedret Eulers metode med $h = 0.1$ til å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1 \qquad \text{og} \qquad x_2 = 0.2\,.$$

(Bruk kun 4 desimaler i utregningene dine.)

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- forbedret Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},u_{n+1})}{2}$
  der $x_{n+1} = x_n + h$, og $u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Maclaurinrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

Eulers formel

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$