Kort om eksakte differensialligninger

Her følger en kort forklaring av bokas notasjon for eksakte differensialligninger, som bygger på stoff dere ikke har sett. Boka skriver en differensialligning

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Dette er bare en annen notasjon for (tenk at du deler hele ligningen på dx)

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

altså en førsteordens differensialligning.

Boka sier så at en slik ligning er eksakt dersom det finnes en funksjon $\phi(x,y)$ slik at $d\phi(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)$. Vi skriver det ut i kjent notasjon: ligningen

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

er **eksakt** dersom det finnes en funksjon $\phi(x,y)$ slik at

$$M(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{og } N(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{1}$$

Hvis ligningen er eksakt, kalles kurvene $\phi(x,y) = C$ for konstant C for **løsningskurvene** til differensialligningen.

For å vise at en differensialligning

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

er eksakt, holder det å vise at $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (det er ikke nok å vise dette i alle tilfeller, men alle tilfeller dere får servert).

Fremgangsmåten er for å løse oppgaver om eksakte differensialligninger blir (se eksempel 2):

(1) Sjekk at ligningen er eksakt ved å vise $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
(2) Finn $\phi(x,y)$ ved å løse de to ligningene (1) – se eksempel 2 i læreboka.
(3) Løsningskurvene er da gitt ved $\phi(x,y) = C$, der C er en vilkårlig konstant.