



## **MA1102**

### **Rekker: Absolutt og betinget konvergens**

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 7

# Absolutt og betinget konvergens



## Definisjon

Vi sier at rekken  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergerer absolutt dersom  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  konvergerer.

## Definisjon

En konvergent rekke  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  som ikke er absolutt konvergens, kalles betinget konvergent.

## Setning

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{absolutt konvergent} \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergerer}$$

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{hvis } a_n > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad \text{og} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{hvis } a_n < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} .$$

Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \quad \text{er positive rekker}$$

# Konvergenstester



La  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  være en rekke.

## Theorem (Forholdstesten)

La

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Da gjelder:

1. Dersom  $a < 1$ , konvergerer rekken absolutt.
2. Dersom  $a > 1$ , divergerer rekken.
3. Dersom  $a = 1$ , ingen konklusjon.

# Konvergenstester



La  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  være en rekke.

## Theorem (Rottesten)

La

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Da gjelder:

1. Dersom  $a < 1$ , konvergerer rekken absolutt.
2. Dersom  $a > 1$ , divergerer rekken.
3. Dersom  $a = 1$ , ingen konklusjon.

## Ombytte av rekker

La  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  være en rekke, og la  $n_0, n_1, n_2, \dots$  være en permutasjon av  $\mathbb{N}$ . Vi kaller rekka

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i}$$

den ombyttede rekken.

### Setning

La  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  være en konvergent positiv rekke med sum  $s$ . Da er også ethvert ombyttede av  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergerer med sum  $s$ , d.v.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad \implies \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i} = s$$

## Setning

La  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  være en absolutt konvergent rekke med sum  $s$ . Da er også ethvert ombyttede av  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergerer med sum  $s$ , d.v.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad \implies \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i} = s$$

## Lemma

Dersom  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  er betinget konvergent, divergerer  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$  og  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ .

## Teorem

Anta  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  er betinget konvergent. For ethvert tall  $a$  finnes det et ombytte av  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  med sum  $a$ .