NTNU
Kunnskap for en bedre verden

MA1102

Rekker: Konvergens av rekker

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 6

Rekker

En rekke er en uendelig sum av tall

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definerer delsummene

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ \dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Obs:

$$\boxed{s_n = s_{n-1} + a_n}$$

Definisjon

Vi sier at rekken konvergerer mot et tall s dersom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s\,.$$

Dersom rekken ikke konvergerer, sier vi at den divergerer.

Geometrisk rekke

En rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles geometrisk med kvotient r dersom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r\,.$$

Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n\,.$$

Setning

Anta $a_0 \neq 0$. Den geometrisk rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ konvergerer hvis $|r| < 1$, med summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r}\,,$$

og divergerer hvis $|r| \geq 1$.

Divergenstest

Divergenstest

Hvis rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, så

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Dersom leddene a_n ikke går mot 0, må rekken divergerer.

Advarsel: Selv om $a_n \to 0$, behøver ikke rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergere

Rekker

Anta rekker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

konvergerer. Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)\,,$$

$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$$

Konvergens av rekker med positive ledd

En rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles positiv dersom tall a_n er positive.

En positiv rekke er begrenset dersom det finnes $M > 0$ slik at

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k < M$$

for alle n.

Setning

En positiv rekke konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset.

Integraltesten

La $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ være en positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergerer} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ existerer}$$

Korollar

Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

Sammenligningstester

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

Theorem

1. *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergerer og at det finnes et positiv tall* c *slik at* $b_n \leq c \cdot a_n$ *for alle* n*. Da konvergerer* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *også.*

2. *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergerer og at det finnes et positiv tall* d *slik at* $b_n \geq d \cdot a_n$ *for alle* n*. Da divergerer* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *også.*

Grensesammenligningstesten

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

Theorem

1. *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergerer og at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty\,.$$

   Da konvergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

2. *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergerer og at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0\,.$$

   Da divergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Konvergenstester

La $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke.

Theorem (Forholdtesten)

La

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Da gjelder:

1. *Dersom* $a < 1$*, konvergerer rekken.*
2. *Dersom* $a > 1$*, divergerer rekken.*
3. *Dersom* $a = 1$*, ingen konklusjon.*

Konvergenstester

La $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke.

Theorem (Rottesten)

La

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Da gjelder:

1. *Dersom* $a < 1$, *konvergerer rekken.*
2. *Dersom* $a > 1$, *divergerer rekken.*
3. *Dersom* $a = 1$, *ingen konklusjon.*

Alternerende rekker

En rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles alternerende dersom to ledd som følger etter hverandre, har motsatte fortegn.

Theorem

Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke der følge $|a_n|$ er avtagende og går mot null. Da er rekken konvergens.

Dersom $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, da

$$|s - s_n| < |a_{n+1}| .$$