NTNU

Kunnskap for en bedre verden

MA1102

Konvergens av funksjonsfølger

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 5

Funksjonsfølger

En funksjonsfølger er en uendelig sekvens av funksjoner

$$\{f_n\} = f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$$

Definition

La $\{f_n\}$ være en funksjonsfølger av funksjoner definert på en mengde I. Vi sier at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f på I dersom

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

for alle $x \in I$. Vi skriver

$$f_n(x) \to f(x)\,.$$

Definition

La f og g være to funksjoner definert på mengde I. Avstanden mellom f og g over I er definert

$$d_I(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\} .$$

Definition

La $\{f_n\}$ være en funksjonsfølger av funksjoner definert på en mengde I. Vi sier at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f på I dersom

$$\lim_{n\to\infty} d_I(f_n, f) = 0 .$$

Vi skriver

$$f_n \to f .$$

punktvis vs uniformt konvergens

La $\{f_n\}$ være en funksjonsfølger, da

$$\text{hvis} \qquad f_n \to f \text{ (uniformt)} \qquad \Longrightarrow \qquad f_n(x) \to f(x) \text{ (punktvis)}\,.$$

Motsatte er ikke altid sant. Men,

Dinis Teorem

La $\{f_n\}$ være en voksende funksjonsfølge som konvergerer punktivis mot en kontinuerlig funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$. Da $f_n \to f$ uniformt på $[a, b]$.

Integrasjon og derivasjon av funksjonsfølger

Theorem

- *La* $\{f_n\}$ *være en funksjonsfølger av kontinuerlige funksjoner definert på intervallet* $[a, b]$ *som konvergerer uniformt mot* f *på* $[a, b]$.
- *La* $g_n(x) = \int_c^x f_n(t)\,dt$ *der* $c \in [a, b]$.

Da $\{g_n\}$ *konvergerer uniformt mot* $g(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ *på* $[a, b]$. *Da*

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)\,dt = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt\,.$$

Theorem

La $\{f_n\}$ *være en funksjonsfølger av funksjoner definert på intervallet* $[a, b]$ *og*

- $\{f'_n\}$ *er en funksjonsfølger av kontinuerlige funksjoner som konvergerer uniformt mot* h.
- $\{f_n(c)\}$ *konvergerer for minst en* $c \in [a, b]$.

Da $\{f_n\}$ *konvergerer uniformt mot en funksjon* f *på intervallet* $[a, b]$ *slik at* $f'(x) = h(x)$ *for* $x \in [a, b]$, *og*

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x))' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' .$$