NTNU
Kunnskap for en bedre verden

MA1102

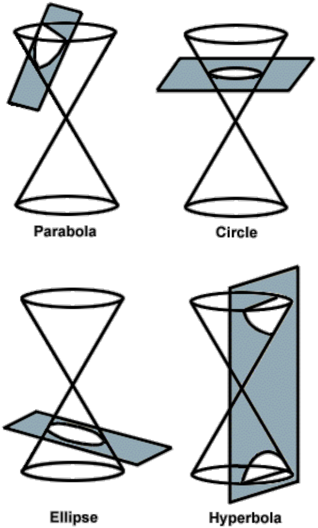
Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 2

Introduksjon

1. Kjeglesnitt.
2. Vektorregning og kurver i planet.
3. funksjonsfølger og Taylor-polynomer.
4. Rekker.
5. Numeriske metoder.
6. Differensialligninger.

Ikke-degenerert kjeglesnitt



Andregradskurve

En andregradskurve er punkter på planet $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som tilfredstiller ligningen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

der enten A, B eller C er ikke null.

Alle kjeglesnitt er andregradskurve, men IKKE alle andregradskurver er kjeglesnitt.

Klassifisering av ikke-degenererte kjeglesnitt

Diskriminanten til ligningen er

$$B^2 - 4AC$$

Det gjelder følgende:

1. Dersom $B^2 - 4AC < 0$, er kjeglesnittet en *sirkel* (hvis $B = 0$ og $A = C$), eller en *ellipse*.
2. Dersom $B^2 - 4AC = 0$, er kjeglesnittet en *parabel*.
3. Dersom $B^2 - 4AC > 0$, er kjeglesnittet en *hyperbel*.

Standardligninger for ikke-degenererte kjeglesnitt

Sirkel	$x^2 + y^2 = a^2$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parabel	$y^2 - 4ax = 0$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Geometrisk definisjon

La

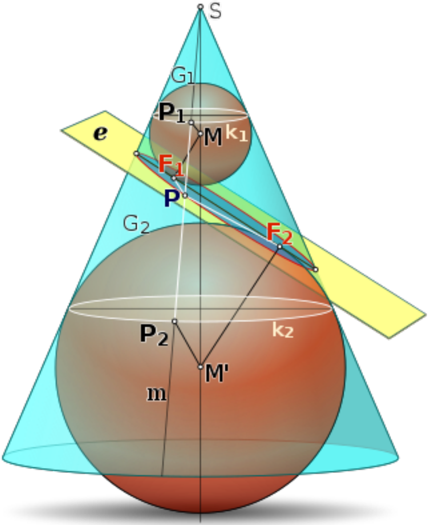
1. ε være et positivt tall (*eksentrisiteten*),
2. ℓ en linje (*styrelinjen*),
3. og $\mathcal{B}$ et punkt (*brennpunktet*).

Trippelen $(\ell, \mathcal{B}, \varepsilon)$ definerer da et kjeglesnitt på følgende måte:

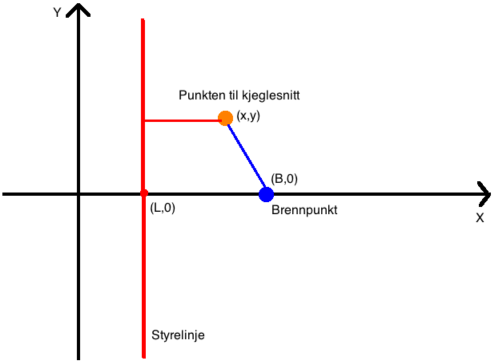
$\mathcal{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ er et punkt på kjeglesnittet definert av $(\varepsilon, \ell, \mathcal{B})$ hvis

$$\boxed{|\mathcal{P}\mathcal{B}| = \varepsilon \cdot |\mathcal{P}\ell|}$$

$|\mathcal{P}\mathcal{B}|$ står for avstanden fra punktet $\mathcal{P}$ til punktet $\mathcal{B}$, og $|\mathcal{P}\ell|$ for korteste avstand fra punktet $\mathcal{P}$ til linjen ℓ.


S
G1
P1
M
k1
e
F1
P
G2
F2
P2
k2
M'
m

I tilfellet



vi har at $\mathcal{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tilhører i kjeglesnittet hvis

$$(x - B)^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x - L)^2$$

Dette er den *generelle ligningen for et kjeglesnitt*

Dersom brennpunktet $\mathcal{B}$ ikke ligger på styrelinja ℓ, gjelder følgende:

1. Dersom $\varepsilon = 0$, er kjeglesnittet en sirkel.
2. Dersom $0 < \varepsilon < 1$, er kjeglesnittet en ellipse.
3. Dersom $\varepsilon = 1$ er kjeglesnittet en parabel.
4. Dersom $\varepsilon > 1$ er kjeglesnittet en hyperbel.

Ellipse

Gitt $(\varepsilon, \ell, \mathcal{B})$ vi kan finne den standardlikningen for ellipsen

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der

Sentrum	$\bar{x} = \frac{B-\varepsilon^2 L}{1-\varepsilon^2}$
Store halvakse	$a = \frac{\varepsilon(L-B)}{1-\varepsilon^2}$
Lille halvakse	$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Ellipse

Motsatt, gitt

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vi har

Eksentrisitet	$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
Styrelinje	$L = \bar{x} - \frac{a}{\varepsilon}$
Brennpunkt	$B = \bar{x} - \varepsilon \cdot a$

Ellipse

Det finnes alternative geometriske beskrivelser,

Gitt to brennpunkter $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$, en ellipse er settet av alle punkter som oppfyller betingelsen at summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik $2a$, altså

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| + |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 2a$$

Parabel

Når $\varepsilon = 1$ vi har

$$\boxed{y^2 = 2(B - L)x + (L^2 - B^2)}$$

Hyperbel

Gitt $(\varepsilon, \ell, \mathcal{B})$ vi kan finne den standardlikningen for hyperbelen

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der

Sentrum	$\bar{x} = \frac{B-\varepsilon^2 L}{1-\varepsilon^2}$
Store halvakse	$a = \frac{\varepsilon(L-B)}{1-\varepsilon^2}$
Lille halvakse	$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

Hyperbel

Motsatt, gitt

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vi har

Eksentrisitet	$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$
Styrelinje	$L = \bar{x} + \frac{a}{\varepsilon}$
Brennpunkt	$B = \bar{x} + \varepsilon \cdot a$

Hyperbel

Det finnes alternative geometriske beskrivelser,

Gitt to brennpunkter $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$, en hyperbel er det settet punkter som oppfyller atdifferansen mellom distansene fra et hvilket som helst punkt på hyperbelen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik $2a$, altså

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| - |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 2a \qquad \text{eller} \qquad |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| - |\mathcal{P}\mathcal{B}_1| = 2\mathrm{a}\,.$$