NTNU
Kunnskap for en bedre verden

MA1102

Newtons metode, numerisk integrasjon

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 10

Newtons metode

La $f(x)$ være en deriverbar funksjon, da a kalles en nullpunkt til $f(x)$ hvis $f(a) = 0$.

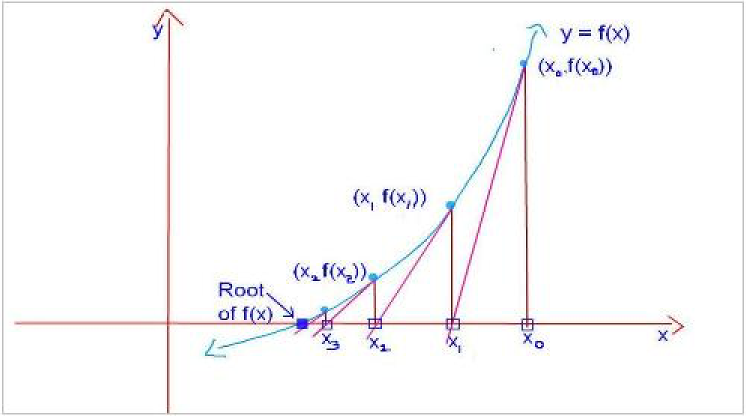
<u>Newtons metode</u>:

Vi definerer funksjon

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Så vi bruker iterasjon

x_0 $\quad$ $x_1 = g(x_0)$ $\quad$ $x_2 = g(x_1)$ $\quad$ $x_{n+1} = g(x_n)$


y
y = f(x)
(x0,f(x0))
(x1 f(x1))
(x2,f(x2))
Root
of f(x)
x3
x2
x1
x0
x

Konvergens setning

Anta at $f(a) = 0$, at $f'(a) \neq 0$ og at $f''(x)$ eksiterer og er kontinuerlig i en omegn rundt a. Da finnes det en $\delta > 0$ slik at Newtons metode$\{x_n\}$ konvergerer mot a når $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$.

Korollar

Anta at $f(a) = 0$ og at $f'(a) \neq 0$. Anta videre at det finnes $\delta > 0$ slik at

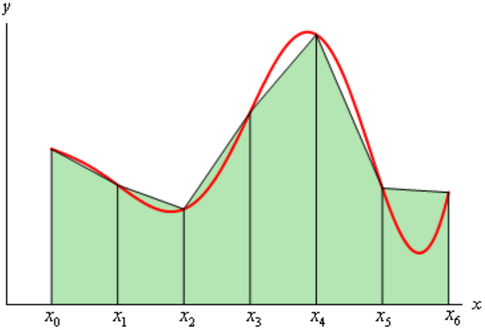
$$\frac{|f''(x)f(x)|}{f'(x)^2} \leq C < 1$$

for alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Dersom $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$, så vil Newtons metode$\{x_n\}$ konvergerer mot a, og

$$|a - x_n| \leq C^n \delta \, .$$

Trapesmetoden metode



Trapesmetoden går ut til å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

med n trapeser

Trapesmetoden metode

La

$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

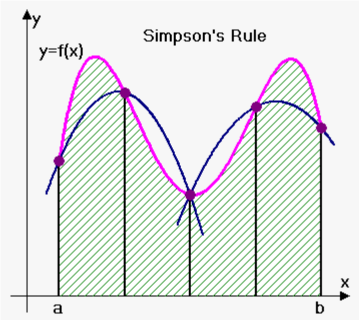
og

$\boxed{x_0 = a}$ $\boxed{x_1 = a + \Delta x}$ $\boxed{x_i = a + i \cdot \Delta x}$ $\boxed{x_n = b}$

Den tilnærmede verdien til integralet er

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n := \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Simpsons metode



Simpsons metode går ut til å tilnærme $f(x)$ med $\frac{n}{2}$ parabler for å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Simpsons metode

La

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n}$$

og

$x_0 = a$ $\quad$ $x_1 = a + \Delta x$ $\quad$ $x_i = a + i \cdot \Delta x$ $\quad$ $x_{2n} = b$

Den tilnærmede verdien til integralet er

$$S_{2n} := \frac{\Delta x}{3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$
$$\cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$

Feilestimater

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Trapesmetoden:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2$$

der $M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$

Simpsons metode: (n partall)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{2n}\right| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\cdot M_4$$

der $M_4 = \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$