

MA1102

Newton's metode, numerisk integrasjon

Eduard Ortega

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 10

Newton's metode

La $f(x)$ være en deriverbar funksjon, da a kalles en nullpunkt til $f(x)$ hvis $f(a) = 0$.

Newton's metode:

Vi definerer funksjon

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

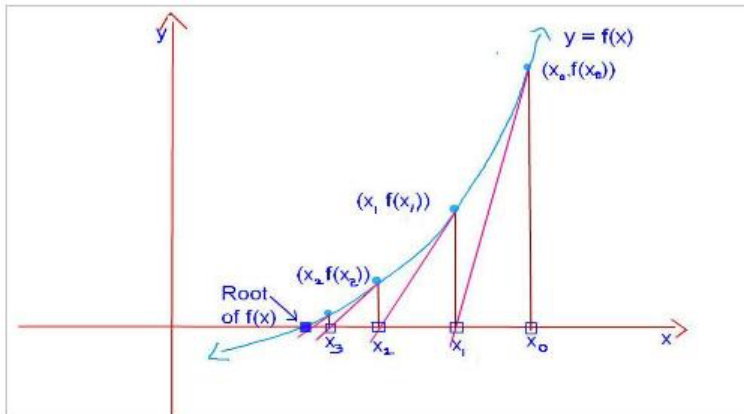
Så vi bruker iterasjon

$$x_0$$

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$



Konvergens setning

Anta at $f(a) = 0$, at $f'(a) \neq 0$ og at $f''(x)$ eksisterer og er kontinuert i en omegn rundt a . Da finnes det en $\delta > 0$ slik at Newtons metode $\{x_n\}$ konvergerer mot a når $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$.

Korollar

Anta at $f(a) = 0$ og at $f'(a) \neq 0$. Anta videre at det finnes $\delta > 0$ slik at

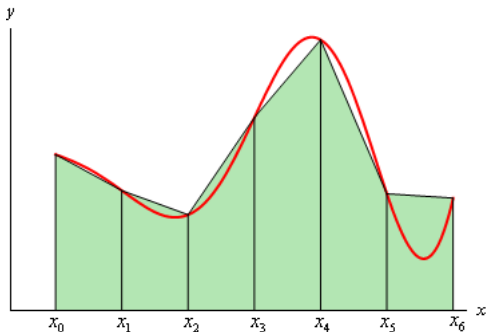
$$\frac{|f''(x)f(x)|}{f'(x)^2} \leq C < 1$$

for alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Dersom $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$, så vil Newtons metode $\{x_n\}$ konvergerer mot a , og

$$|a - x_n| \leq C^n \delta.$$

Trapesmetoden metode



Trapesmetoden går ut til å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x) dx$$

med n trapeser

Trapesmetoden metode

La

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

og

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + \Delta x$$

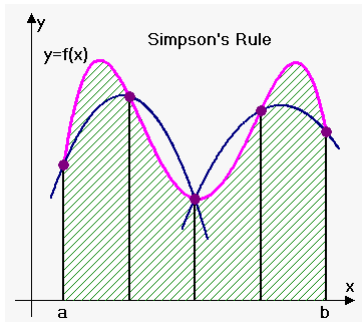
$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

$$x_n = b$$

Den tilnærmede verdien til integralet er

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n := \frac{\Delta x}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Simpsons metode



Simpsons metode går ut til å tilnærme $f(x)$ med $\frac{n}{2}$ parabler for å tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x) dx .$$

Simpsons metode

La

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n}$$

og

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + \Delta x$$

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

$$x_{2n} = b$$

Den tilnærmede verdien til integralet er

$$S_{2n} := \frac{\Delta x}{3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots \\ \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$

Feilestimater

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Trapezmetoden:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2$$

der $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$

Simpsons metode:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{2n} \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot M_4$$

der $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$

