NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102/6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen: Eduard Ortega

Tlf: 46760087

Eksamensdato: 8. Juni 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.
- Alle 10 deloppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Finn hastighetsvektoren, farten, og baneakselerasjonen til kurven

$$\overrightarrow{r(t)} = (\cos(t^2), \sin(t^2)) \qquad t \geq 0\,.$$

Merk: $\cos(t^2)$ *og* $\sin(t^2)$, *ikke* $\cos^2(t)$ *og* $\sin^2(t)$

Oppgave 2 La $f(x) = e^{-x^2}$. Finn integralet

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

numerisk ved å bruke Simpsons metode slik at approksimasjonsfeilen er mindre enn 10^{-3}. Bruk 4 desimaler i utregningene.

Hint: Bruk uten bevis at maksimalverdien til $|f^{(4)}(x)|$ på intervallet $[1, 2]$ kan begrenses av 8.

Oppgave 3 Gjør 3 iterasjoner av Newtons metode med startpunkt $x_0 = 0$ for å finne nullpunktet til funksjonen $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$. Bruk 4 desimaler i utregningene.

Oppgave 4 Vis at andregradslikningen $\lambda x^2 - y^2 + x - \lambda = 0$ definerer en hyperbel for $\lambda > 0$. Finn eksentrisiteten og sentrum til hyperbelen uttrykt ved λ.

Oppgave 5

a) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' - 2y' + y = 0$$

med initialbetingelser $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$.

b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}$$

med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

c) Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensiallikningen

$$x^2 y'' + y' - 2y = 0\,,$$

for $x \in \mathbb{R}$.

Oppgave 6

a) Finn Taylor-rekken til funksjonen $f(x) = \ln(1 + x^2)$ om punktet $a = 0$ og dens konvergensområde. Bruk dette til å finne summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)}\,.$$

b) Finn konvergensområdene til potensrekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nx}{2+3n}\right)^n\,.$$

Oppgave 7 La $f_n(x) = xe^{-nx}$ være definert på intervallet $I = [0, \infty)$. Vis at følgen $\{f_n(x)\}$ konvergerer uniformt mot $f(x) = 0$.

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- Simpsons metode: $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_{2n} := \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\Big]$ der $f_i = f(x_i)$.
  Hvis f har kontinuerlig fjerdederivert på $[a,b]$, så har vi
  $$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{2n}\right| = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}|f^{(4)}(c)| \qquad \text{hvor } c \in [a,b]$$
- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Eulers midtpunktsmetode: $y_n = y_{n-1} + hf(x'_{n-1}, y'_{n-1})$
  der $(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}f(x_{n-1}, y_{n-1}))$.

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

Taylors formel med restledd

$$f(x) = T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

der c er et tall i det åpne intervallet mellom a og x.

Eulers formel

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

Kjeglesnitt

Ligning for kjeglesnitt med eksentrisitet $\varepsilon \neq 1$ (dvs. ellipse eller hyperbel), *styrelinje* $x = L$ og *brennpunkt* i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)((x - \bar{x})^2 - a^2)\,,$$

der $\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$ er *sentrum* i kjeglesnitt og $a^2 = (\frac{\varepsilon(B-L)}{1-\varepsilon^2})^2$.

For $\varepsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2\,.$$