NTNU
Kunnskap for en bedre verden

MA1102

Rekker av funksjoner

Eduard Ortega og Magnus Landstad
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 8

Rekker av funksjoner

La
$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$$
være en rekke der $v_n(x)$ er funksjoner definert på I.

Vi definerer den n-delsummen

$$s_n(x) = v_0(x) + v_1(x) + \cdots + v_n(x)\,.$$

Punktivis konvergens

Vi sier at $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ konvergerer punktvis mot $v(x)$ på I dersom funksjonsfølger $\{s_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $v(x)$ på I, d.v.s

$$s_n(x) \longrightarrow v(x) \qquad \text{på } I\,.$$

Uniformt konvergens

Vi sier at $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ konvergerer uniformt mot $v(x)$ på I dersom funksjonsfølger $\{s_n(x)\}$ konvergerer uniformt mot $v(x)$ på I, d.v.s

$$s_n \longrightarrow v \qquad \text{på } I\,.$$

Obs:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \quad \text{uniformt} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \quad \text{punktvis}$$

Konvergensområde

Konvergensområdet til funksjonsrekke $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ er den storste megden I der rekken $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ konvergerer punktvis.

Obs: Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ er en rekke av kontinuerlige funksjoner på I som konvergerer uniformt mot $v(x)$, er funksjonen $v(x)$ kontinuerlig.

Absolut konvergens

Vi sier at $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ konvergerer absolutt på I dersom rekka $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(a)$ er absolut konvergent for alle $a \in I$.

Weierstrass M-test

La $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ være en rekke av funksjoner definert på I. Anta det finnes en konvergent rekke $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ slik at

$$|v_n(a)| \leq M_n$$

for alle $a \in I$. Da konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ uniformt og absolutt på I.

Potensrekke

En potensrekke er en funksjonsrekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

Teorem

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ være en potensrekke. Da er det tre muligheter:

1. Potensrekken konvergerer for alle x. (Konvergensradien ∞)
2. Potensrekken konvergerer bare for $x = a$. (Konvergensradien 0)
3. Det finnes et tall r (konvergensradien) slik at potensrekken konvergerer absolutt for alle x slik at $|x-a| < r$ og divergerer for alle x slik at $|x-a| > r$.

Lemma

Anta at potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ has konvergensradius r. Da er funksjonen

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

er kontinuerlig på intervallet $(a-r, a+r)$.

Abels teorem

Summen $s(x)$ til en potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ er kontinuerlig i hele konvergensområdet.