MA1102

Rekker: Absolutt og betinget konvergens

Eduard Ortega og Magnus Landstad

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 7

Absolutt konvergens

Definisjon

Vi sier at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergere absolutt dersom $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Setning

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{absolutt konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergerer}$$

Betinget konvergent

Definisjon

En konvergent rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ som ikke er absolutt konvergens, kalles betinget konvergent.

Konvergenstester

$$\text{La} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{være en rekke.}$$

Theorem (Forholdtesten)

La

$$a = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

Da gjelder:

1. *Dersom $a < 1$, konvergerer rekken absolutt.*
2. *Dersom $a > 1$, divergerer rekken.*
3. *Dersom $a = 1$, ingen konklusjon.*

Konvergenstester

$$\text{La} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{være en rekke.}$$

Theorem (Rottesten)

La

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Da gjelder:

1. *Dersom* $a < 1$, *konvergerer rekken absolutt.*
2. *Dersom* $a > 1$, *divergerer rekken.*
3. *Dersom* $a = 1$, *ingen konklusjon.*

Ombytte av rekker

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke, og la $n_0, n_1, n_2, \ldots$ være en permutasjon av $\mathbb{N}$. Vi kaller rekka

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i}$$

den ombyttede rekken.

Setning

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en konvergent positiv rekke med sum s. Da er også ethvert ombyttede av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer med sum s, d.v.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i} = s$$

Setning

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en absolutt konvergent rekke med sum s. Da er også ethvert ombyttede av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer med sum s, d.v.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i} = s$$

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekka, da

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{hvis } a_n > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{hvis } a_n < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \qquad \text{er positive rekker}$$

Lemma

Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er betinget konvergent, divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$.