



MA1102

Rekker: Absolutt og betinget konvergens

Eduard Ortega og Magnus Landstad

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 7

Absolutt og betinget konvergens



Definisjon

Vi sier at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt dersom $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Definisjon

En konvergent rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ som ikke er absolutt konvergens, kalles betinget konvergent.

Setning

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{absolutt konvergent} \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konvergerer}$$

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{hvis } a_n > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad \text{og} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{hvis } a_n < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} .$$

Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \quad \text{er positive rekker}$$

Konvergenstester



La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke.

Theorem (Forholdstesten)

La

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Da gjelder:

1. Dersom $a < 1$, konvergerer rekken absolutt.
2. Dersom $a > 1$, divergerer rekken.
3. Dersom $a = 1$, ingen konklusjon.

Konvergenstester



La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke.

Theorem (Rottesten)

La

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Da gjelder:

1. Dersom $a < 1$, konvergerer rekken absolutt.
2. Dersom $a > 1$, divergerer rekken.
3. Dersom $a = 1$, ingen konklusjon.

Ombytte av rekker

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke, og la n_0, n_1, n_2, \dots være en permutasjon av \mathbb{N} . Vi kaller rekka

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i}$$

den ombyttede rekken.

Setning

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en konvergent positiv rekke med sum s . Da er også ethvert ombyttede av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer med sum s , d.v.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad \implies \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i} = s$$

Setning

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en absolutt konvergent rekke med sum s . Da er også ethvert ombyttede av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer med sum s , d.v.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad \implies \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{n_i} = s$$

Lemma

Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er betinget konvergent, divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$.

Teorem

Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er betinget konvergent. For ethvert tall a finnes det et ombytte av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med sum a .