



MA1102

Rekker: Konvergens av rekker

Eduard Ortega og Magnus Landstad

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 6

Rekker

En rekke er en uendelig sum av tall

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Definerer delsummene

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

...

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Obs:

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

Definisjon

Vi sier at rekken konvergerer mot et tall s dersom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Dersom rekken ikke konvergerer, sier vi at den divergerer.

Geometrisk rekke

En rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles geometrisk med kvotient r dersom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n.$$

Setning

Anta $a_0 \neq 0$. Den geometrisk rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ konvergerer hvis $|r| < 1$, med summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r},$$

og divergerer hvis $|r| \geq 1$.

Divergenstest



Divergenstest

Hvis rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, så

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dersom leddene a_n ikke går mot 0, må rekken divergerer.

Advarsel: Selv om $a_n \rightarrow 0$, behøver ikke rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergere

Rekker

Anta rekker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

konvergerer. Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n),$$

$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$$

Konvergens av rekker med positive ledd

En rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles positiv dersom tall a_n er positive.

En positiv rekke er begrenset dersom det finnes $M > 0$ slik at

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k < M$$

for alle n .

Setning

En positiv rekke konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset.

Integraltesten

La $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være en positiv, kontinuert og avtagende funksjon, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergerer} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ eksisterer}$$

Korollar

Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

Sammenligningstester



La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

Theorem

1. Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer og at det finnes et positiv tall c slik at $b_n \leq c \cdot a_n$ for alle n . Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ også.
2. Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergerer og at det finnes et positiv tall d slik at $b_n \geq d \cdot a_n$ for alle n . Da divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ også.

Grensesammenligningstesten

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

Theorem

1. Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer og at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty.$$

Da konvergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

2. Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergerer og at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} > 0.$$

Da divergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Konvergenstester



La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke.

Theorem (Forholdtesten)

La

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Da gjelder:

1. Dersom $a < 1$, konvergerer rekken.
2. Dersom $a > 1$, divergerer rekken.
3. Dersom $a = 1$, ingen konklusjon.

Konvergenstester



La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke.

Theorem (Rottesten)

La

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Da gjelder:

1. Dersom $a < 1$, konvergerer rekken.
2. Dersom $a > 1$, divergerer rekken.
3. Dersom $a = 1$, ingen konklusjon.

Alternerende rekker

En rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles alternerende dersom to ledd som følger etter hverandre, har motsatte fortegn.

Theorem

Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke der følge $|a_n|$ er avtagende og går mot null. Da er rekken konvergens.

Dersom $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, da

$$|s - s_n| < |a_{n+1}|.$$