



MA1102

Konvergens av funksjonsfølger

Eduard Ortega og Magnus Landstad

Department of Mathematical sciences, NTNU

uke 5

Funksjonsfølger

En funksjonsfølger er en uendelig sekvens av funksjoner

$$\{f_n\} = f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$$

Definition

La $\{f_n\}$ være en funksjonsfølger av funksjoner definert på en mengde I . Vi sier at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f på I dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

for alle $x \in I$. Vi skriver

$$f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Definition

La f og g være to funksjoner definert på mengde I . Avstanden mellom f og g over I er definert

$$d_I(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}.$$

Definition

La $\{f_n\}$ være en funksjonsfølger av funksjoner definert på en mengde I . Vi sier at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f på I dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_I(f_n, f) = 0.$$

Vi skriver

$$f_n \rightarrow f.$$

punktvis vs uniformt konvergens



La $\{f_n\}$ være en funksjonsfølge, da

$$\text{hvis } f_n \rightarrow f \text{ (uniformt)} \implies f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ (punktvis)}.$$

Motsatte er ikke alltid sant. Men,

Dinis Teorem

La $\{f_n\}$ være en voksende funksjonsfølge som konvergerer punktvis mot en kontinuerlig funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$. Da $f_n \rightarrow f$ uniformt på $[a, b]$.

Integrasjon og derivasjon av funksjonsfølger

Theorem

- La $\{f_n\}$ være en funksjonsfølger av kontinuerlige funksjoner definert på intervallet $[a, b]$ som konvergerer uniformt mot f på $[a, b]$.
- La $g_n(x) = \int_c^x f_n(t) dt$ der $c \in [a, b]$.

Da $\{g_n\}$ konvergerer uniformt mot $g(x) = \int_c^x f(t) dt$ på $[a, b]$. Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f_n(t) dt = \int_c^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

Theorem

La $\{f_n\}$ være en funksjonsfølge av funksjoner definert på intervallet $[a, b]$ og

- $\{f'_n\}$ er en funksjonsfølge av kontinuerlige funksjoner som konvergerer uniformt mot h .
- $\{f_n(c)\}$ konvergerer for minst en $c \in [a, b]$.

Da $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot en funksjon f på intervallet $[a, b]$ slik at $f'(x) = h(x)$ for $x \in [a, b]$, og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x))' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' .$$