NTNU
Kunnskap for en bedre verden

MA1102

Taylor-polynomer og Taylors formel

Eduard Ortega og Magnus Landstad
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 4

Taylor-polynom

La $f(x)$ være en n-ganger deriverbar funksjon i punktet a.

Et polynom $T_n f(x)$ av grad n kalles det Taylor-polynomet av grad n om punktet a hvis

$$f(a) = T_n f(a)$$

$$f'(a) = (T_n f)'(a)$$

$$f''(a) = (T_n f)''(a)$$

$$\cdots$$

$$f^{(n)}(a) = (T_n f)^{(n)}(a)$$

$$T_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

eller

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Obs: To polynomer $p(x)$ og $q(x)$ av grad n slik at

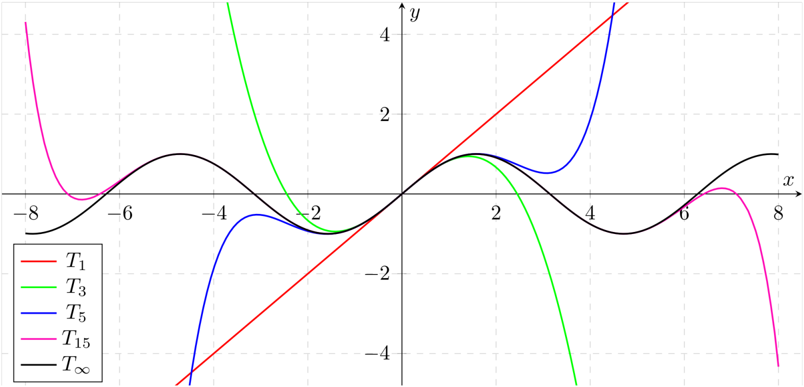
$$p^{(k)}(a) = q^{(k)}(a)$$

for alle $k = 0, 1, \ldots, n$ er like, d.v.s. $p(x) = q(x)$.

Derfor, det Taylor-polynomet er unik.

Taylor formel med restledd

$f(x) = \sin x$



Taylor formel med restledd

La $f(x)$ være en n-ganger deriverbar funksjon i punktet a, og la $T_n f(x)$ være Taylor-polynoment av grad n om punktet a.

Da restleddet er funksjon

$$R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)\,.$$

La $f(x)$ være en n-ganger deriverbar funksjon i punktet a, og la $T_n f(x)$ være Taylor-polynoment av grad n om punktet a.

Taylors formel for restledd

Anta $f(x)$ og den $n+1$ første deriverte er kontinuerlige på intervallet $[a,b]$. Da

$$R_n f(b) = f(b) - T_n f(b) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n \, dt \,.$$

Vi har at

$$\boxed{|R_n f(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1} \,,}$$

der

$$M := \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)|$$

Lagranges restleddsformel

La $f(x)$ være en n-ganger deriverbar funksjon i punktet a, og la $T_n f(x)$ være Taylor-polynoment av grad n om punktet a.

Anta $f(x)$ og den $n+1$ første deriverte er kontinuerlige på intervallet $[a, b]$.

Da

$$\boxed{R_n f(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} |b-a|^{n+1} ,}$$

for et tall $c \in (a, b)$.