

## **MA1102**

Eduard Ortega og Magnus Landstad

Department of Mathematical sciences, NTNU

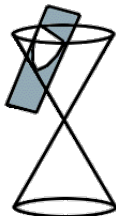
uke 2

# Introduksjon

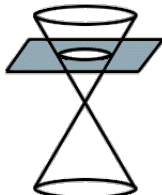


1. Kjeglesnitt.
2. Vektorregning og kurver i planet.
3. funksjonsfølger og Taylor-polynomer.
4. Rekker.
5. Numeriske metoder.
6. Differensialligninger.

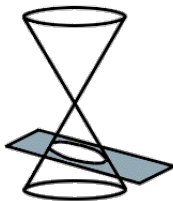
# Ikke-degenerert kjeglesnitt



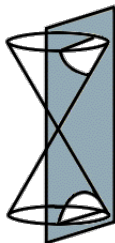
Parabola



Circle



Ellipse



Hyperbola



## Andregradskurve

En andregradskurve er punkter på planet  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  som tilfredstiller ligningen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

der enten  $A$ ,  $B$  eller  $C$  er ikke null.

Alle kjeglesnitt er andregradskurve, men IKKE alle andregradskurver er kjeglesnitt.

# Klassifisering av ikke-degenererte kjeglesnitt



*Diskriminanten* til ligningen er

$$B^2 - 4AC$$

Det gjelder følgende:

1. Dersom  $B^2 - 4AC < 0$ , er kjeglesnittet en *sirkel* (hvis  $B = 0$  og  $A = C$ ), eller en *ellipse*.
2. Dersom  $B^2 - 4AC = 0$ , er kjeglesnittet en *parabel*.
3. Dersom  $B^2 - 4AC > 0$ , er kjeglesnittet en *hyperbel*.

# Standardligninger for ikke-degenererte kjeglesnitt



Sirkel	$x^2 + y^2 = a^2$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parabel	$y^2 - 4ax = 0$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

## Geometrisk definisjon

La

1.  $\varepsilon$  være et positivt tall (*eksentrisiteten*),
2.  $\ell$  en linje (*styrelinjen*),
3. og  $\mathcal{B}$  et punkt (*brennpunktet*).

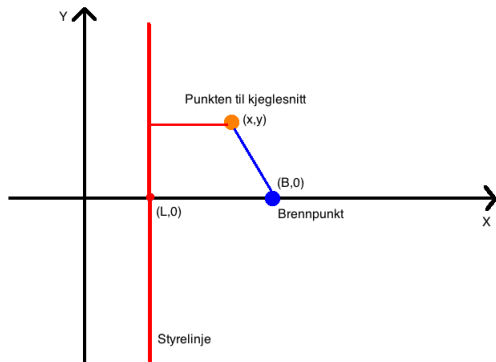
Trippelen  $(\varepsilon, \ell, \mathcal{B})$  definerer da et kjeglesnitt på følgende måte:

$\mathcal{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  er et punkt på kjeglesnittet definert av  $(\varepsilon, \ell, \mathcal{B})$  hvis

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}| = \varepsilon \cdot |\mathcal{P}\ell|$$

$|\mathcal{P}\mathcal{B}|$  står for avstanden fra punktet  $\mathcal{P}$  til punktet  $\mathcal{B}$ , og  $|\mathcal{P}\ell|$  for korteste avstand fra punktet  $\mathcal{P}$  til linjen  $\ell$ .

## I tilfellet



vi har at  $\mathcal{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  tilhører i kjeglesnittet hvis

$$(x - B)^2 + y^2 = \varepsilon^2(x - L)^2$$

Dette er den *generelle ligningen for et kjeglesnitt*





Dersom brennpunktet  $B$  ikke ligger på styrelinja  $\ell$ , gjelder følgende:

1. Dersom  $0 < \varepsilon < 1$ , er kjeglesnittet en ellipse eller sirkel.
2. Dersom  $\varepsilon = 1$  er kjeglesnittet en parabel.
3. Dersom  $\varepsilon > 1$  er kjeglesnittet en hyperbel.

# Ellipse



Gitt  $(\varepsilon, l, B)$  vi kan finne den standardlikningen for ellipsen

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der

Sentrum	$\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$
Store halvakse	$a = \frac{\varepsilon(L - B)}{1 - \varepsilon^2}$
Lille halvakse	$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$

# Ellipse



Motsatt, gitt

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vi har

Eksentrisitet	$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
Styrelinje	$L = \bar{x} - \frac{a}{\varepsilon}$
Brennpunkt	$B = \bar{x} - \varepsilon \cdot a$

# Ellipse



Det finnes alternative geometriske beskrivelser,

Gitt to brennpunkter  $B_1$  og  $B_2$ , en ellipse er settet av alle punkter som oppfyller betingelsen at summen av avstandene fra et punkt  $\mathcal{P}$  på ellipsen til  $B_1$  og  $B_2$  er konstant og lik  $2a$ , altså

$$|\mathcal{P}B_1| + |\mathcal{P}B_2| = 2a$$

# Hyperbel



Gitt  $(\varepsilon, l, B)$  vi kan finne den standardlikningen for hyperbelen

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der

Sentrum	$\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$
Store halvakse	$a = \frac{\varepsilon(L - B)}{1 - \varepsilon^2}$
Lille halvakse	$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

# Hyperbel



Motsatt, gitt

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vi har

Eksentrisitet	$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$
Styrelinje	$L = \bar{x} + \frac{a}{\varepsilon}$
Brennpunkt	$B = \bar{x} + \varepsilon \cdot a$

# Hyperbel



Det finnes alternative geometriske beskrivelser,

Gitt to brennpunkter  $B_1$  og  $B_2$ , en hyperbel er det settet punkter som oppfyller at differansen mellom distansene fra et hvilket som helst punkt på hyperbelen til  $B_1$  og  $B_2$  er konstant og lik  $2a$ , altså

$$|\mathcal{P}B_1| - |\mathcal{P}B_2| = 2a \quad \text{eller} \quad |\mathcal{P}B_2| - |\mathcal{P}B_1| = 2a.$$