

MA1102

Eduard Ortega og Magnus Landstad

Department of Mathematical sciences, NTNU

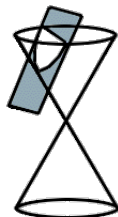
uke 2

Introduksjon

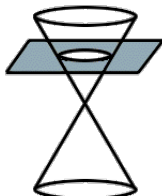


1. Kjeglesnitt.
2. Vektorregning og kurver i planet.
3. funksjonsfølger og Taylor-polynomer.
4. Rekker.
5. Numeriske metoder.
6. Differensialligninger.

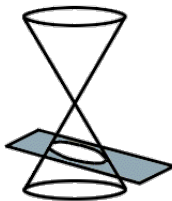
Ikke-degenerert kjeglesnitt



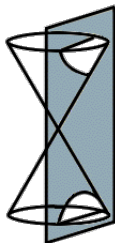
Parabola



Circle



Ellipse



Hyperbola



Andregradskurve



En andregradskurve er punkter på planet $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som tilfredstiller ligningen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

der enten A , B eller C er ikke null.

Alle kjeglesnitt er andregradskurve, men IKKE alle andregradskurver er kjeglesnitt.

Klassifisering av ikke-degenererte kjeglesnitt



Diskriminanten til ligningen er

$$B^2 - 4AC$$

Det gjelder følgende:

1. Dersom $B^2 - 4AC < 0$, er kjeglesnittet en *sirkel* (hvis $B = 0$ og $A = C$), eller en *ellipse*.
2. Dersom $B^2 - 4AC = 0$, er kjeglesnittet en *parabel*.
3. Dersom $B^2 - 4AC > 0$, er kjeglesnittet en *hyperbel*.

Standardligninger for ikke-degenererte kjeglesnitt



Sirkel	$x^2 + y^2 = a^2$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parabel	$y^2 - 4ax = 0$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Geometrisk definisjon

La

1. ε være et positivt tall (*eksentrisiteten*),
2. ℓ en linje (*styrelinjen*),
3. og \mathcal{B} et punkt (*brennpunktet*).

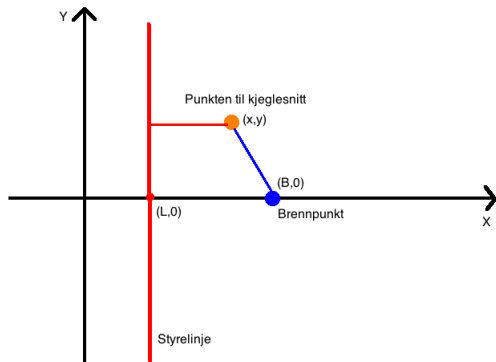
Trippelen $(\ell, \mathcal{B}, \varepsilon)$ definerer da et kjeglesnitt på følgende måte:

$\mathcal{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ er et punkt på kjeglesnittet definert av $(\varepsilon, \ell, \mathcal{B})$ hvis

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}| = \varepsilon \cdot |\mathcal{P}\ell|$$

$|\mathcal{P}\mathcal{B}|$ står for avstanden fra punktet \mathcal{P} til punktet \mathcal{B} , og $|\mathcal{P}\ell|$ for korteste avstand fra punktet \mathcal{P} til linjen ℓ .

I tilfellet



vi har at $\mathcal{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tilhører i kjeglesnittet hvis

$$(x - B)^2 + y^2 = \varepsilon^2(x - L)^2$$

Dette er den *generelle ligningen for et kjeglesnitt*



Dersom brennpunktet B ikke ligger på styrelinja ℓ , gjelder følgende:

1. Dersom $0 < \varepsilon < 1$, er kjeglesnittet en ellipse eller sirkel.
2. Dersom $\varepsilon = 1$ er kjeglesnittet en parabel.
3. Dersom $\varepsilon > 1$ er kjeglesnittet en hyperbel.

Ellipse



Gitt (ε, l, B) vi kan finne den standardlikningen for ellipsen

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der

Sentrum	$\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$
Store halvakse	$a = \frac{\varepsilon(L - B)}{1 - \varepsilon^2}$
Lille halvakse	$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$

Ellipse



Motsatt, gitt

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vi har

Eksentrisitet	$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
Styrelinje	$L = \bar{x} - \frac{a}{\varepsilon}$
Brennpunkt	$B = \bar{x} - \varepsilon \cdot a$

Ellipse



Det finnes alternative geometriske beskrivelser,

Gitt to brennpunkter B_1 og B_2 , en ellipse er settet av alle punkter som oppfyller betingelsen at summen av avstandene fra et punkt \mathcal{P} på ellipsen til B_1 og B_2 er konstant og lik $2a$, altså

$$|\mathcal{P}B_1| + |\mathcal{P}B_2| = 2a$$

Parabel



Når $\varepsilon = 1$ vi har

$$y^2 = 2(B - L)x + (L^2 - B^2)$$

Hyperbel



Gitt (ε, ℓ, B) vi kan finne den standardlikningen for hyperbelen

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der

Sentrum	$\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$
Store halvakse	$a = \frac{\varepsilon(L - B)}{1 - \varepsilon^2}$
Lille halvakse	$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

Hyperbel



Motsatt, gitt

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vi har

Eksentrisitet	$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$
Styrelinje	$L = \bar{x} + \frac{a}{\varepsilon}$
Brennpunkt	$B = \bar{x} + \varepsilon \cdot a$

Hyperbel



Det finnes alternative geometriske beskrivelser,

Gitt to brennpunkter B_1 og B_2 , en hyperbel er det settet punkter som oppfyller at differansen mellom distansene fra et hvilket som helst punkt på hyperbelen til B_1 og B_2 er konstant og lik $2a$, altså

$$|\mathcal{P}B_1| - |\mathcal{P}B_2| = 2a \quad \text{eller} \quad |\mathcal{P}B_2| - |\mathcal{P}B_1| = 2a.$$