Oppgave 1

La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (-2, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (4, 0)$ og der summen avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 10. Finn sentrum, halv-aksene og gi likningen til $\mathcal{E}$ på standard form.

Løsning

Sentrum er midtpunktet mellom $\mathcal{B}_1 = (-2, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (4, 0)$, så $\frac{\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2}{2} = (1, 0)$. Så ligningen til $\mathcal{E}$ er

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Vi finner halv-akenene. Først vi setter $y = 0$, derfor

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{(x-1)^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow x = 1 \pm a\,.$$

Så ellipsen snitter x-aksen i punktene $(1-a, 0)$ og $(1+a, 0)$. Men avstanden fra B_1 til $(1-a, 0)$ er $-3+a$ og avstanden fra B_2 til $(1-a)$ er $3+a$. Dermed

$$10 = (-3+a) + (3+a) = 2a \Longrightarrow a = 5\,.$$

Setter så $x = 1$,

$$\frac{(1-1)^2}{5^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y = \pm b\,.$$

Derfor snitter ellipsen y-aksen i punktene $(1, b)$ og $(1, -b)$. Men avstanden fra B_1 til $(1, b)$ er $\sqrt{9+b^2}$ og avstanden fra B_2 til $(1, b)$ er også $\sqrt{9+b^2}$. Dermed

$$\sqrt{9+b^2} + \sqrt{9+b^2} = 10 \Longrightarrow 2\sqrt{9+b^2} = 10 \Longrightarrow \sqrt{9+b^2} = 5 \Longrightarrow b = 4\,.$$

Så likningen til $\mathcal{E}$ er

$$\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1\,.$$

Oppgave 2

En parametrisk kurve er gitt på formen

$$\vec{r}(t) = \Big(t^2\cos(2t), t^2\sin(2t)\Big) \qquad t \geq 0\,.$$

Finn hastigheten $\vec{v}$, farten $\boldsymbol{v}$, akselerasjonen $\vec{a}$ og baneakselerasjonen $\boldsymbol{a}$ til kurven $\vec{r}$.

Finn buelengden til kurven fra $t = 0$ til $t = 1$.

Løsning

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \Big(2t\cos(2t) - 2t^2\sin(2t), 2t\sin(2t) + 2t^2\cos(2t)\Big)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \sqrt{(2t\cos(2t) - 2t^2\sin(2t))^2 + (2t\sin(2t) + 2t^2\cos(2t))^2} \\
&= \sqrt{4t^2\cos^2(2t) + 4t^4\sin^2(2t) + 4t^2\sin^2(2t) + 4t^4\cos^2(2t)} \\
&= \sqrt{4t^2 + 4t^4} = 2t\sqrt{1+t^2}
\end{aligned}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \Big(2\cos(2t) - 8t\sin(2t) - 4t^2\cos(2t), 2\sin(2t) + 8t\cos(2t) - 4t^2\sin(2t)\Big)$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}'(t) = 2\sqrt{1+t^2} + \frac{2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

Buelengden

$$L = \int_0^1 \boldsymbol{v}(t)\,dt = \int_0^1 2t\sqrt{1+t^2}\,dt = (\frac{2(1+t^2)^{3/2}}{3}]_0^1 = \frac{2(2)^{3/2}}{3} - \frac{2}{3}$$

Oppgave 3

Finn Taylor-rekken $Tf(x)$ til funksjon $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ om punktet $a = 0$. For hvilke punkter $Tf(x) = f(x)$? (Hint: Start med Taylor-rekken til $g(x) = \frac{1}{1-x}$)

Løsning

Vi starter med

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad -1 < x < 1$$

og

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad -1 < x < 1\,.$$

Derfor

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = Tf(x) \qquad -1 < x < 1
\end{aligned}$$

Derfor

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1\,.$$

Oppgave 4

La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge slik at $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = C$.

- Hva blir konvergensradius r for rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
- Vist at da har også den integrerte rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ og den deriverte rekka $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ samme konvergensradius.
- Se på rekka
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$
Finn konvergensintervallet og vis at rekka konvergerer uniformt her.

Løsning

a) Vi bruker forholdtesten, da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = C|x| < 1$$

og derfor $|x| < \frac{1}{C}$. Så $r = \frac{1}{C}$.

b) Vi bruker forholdtesten for den integrerte rekka, da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}}{\frac{a_{n-1}x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\left|\frac{n}{n+1}\right| |x| = C\cdot 1\cdot |x| = C|x| < 1$$

og derfor $|x| < \frac{1}{C}$, så $r = \frac{1}{C}$. For den deriverte rekka

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)a_{n+2}x^{n+1}}{(n+1)a_{n+1}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\left|\frac{n+2}{n+1}\right| |x| = C\cdot 1\cdot |x| = C|x| < 1\,,$$

og derfor $|x| < \frac{1}{C}$, så $r = \frac{1}{C}$.

c) Vi bruker forholdtesten

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| |x| = |x| < 1\,,$$

så konvergensradius er $r = 1$. Men
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$
og
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} < \infty\,,$$
derfor er konvergensintervallet $[-1, 1]$, og rekka konvergere uniformt der i følge Weierstrass' M-test.

Problem 5

Finn løsningen av differensialligningen
$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$$
med $y(0) = 0$ og $y'(0) = 2$.

Løsning

Først finner vi løsningen til homogen ODL, dvs
$$y'' - 4y' + 5y = 0\,.$$
Karakteristisk polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ har røter $2 - i$ og $2 + i$, og derfor
$$y_h = Ae^{2t}\cos(t) + Be^{2t}\sin(t)$$
Da er en partikular løsning på formen $y_p = Ce^{2t}$, og
$$(Ce^{2t})'' - 4(Ce^{2t})' + 5(Ce^{2t}) = e^{2x}$$
og
$$4Ce^{2t} - 8Ce^{2t} + 5Ce^{2t} = Ce^{2x} = e^{2t}\,,$$
så $C = 1$ og $y_p = e^{2t}$. Så generell løsning er
$$y(t) = y_p + y_h = e^{2t} + Ae^{2t}\cos(t) + Be^{2t}\sin(t)\,.$$
Nå er
$$y(0) = 1 + A = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = -1\,.$$
og
$$y'(t) = 2e^{2t} - 2e^{2t}\cos(t) + e^{2t}\sin(t) + 2Be^{2t}\sin(t) + Be^{2t}\cos(t)$$
$$y'(0) = 2 - 2 + B = B = 2\,.$$
Så løsningen er
$$y(t) = y_p + y_h = e^{2t} - e^{2t}\cos(t) + 2e^{2t}\sin(t)\,.$$

Problem 6

Bruk Eulers formel til å finne $\cos 3\theta$ og $\sin 3\theta$ uttryket ved $\cos\theta$ og $\sin\theta$.

Løsning

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= e^{3\theta i} = (e^{\theta i})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta.\end{aligned}$$

Så

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

og

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

Ved å bruke at $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, kan en få andre uttrykk.

Problem 7

Bruk Simpsons metode med skrittlengde $h = 0.25$ til å finne en numerisk approksimasjon av integralet

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \text{der} \qquad f(x) = \sin(x^2)\,.$$

Finn også approksimasjonsfeilen. (Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.)
(Hint: du kan bruke at $\max_{0\le x\le 1}|f^{(4)}(x)| \le 30$).

Løsning

$$S_4 = \frac{0.25}{3}\Big(\sin(0) + 4\sin((0.25)^2) + 2\sin((0.5)^2) + 4\sin((0.75)^2) + \sin((1)^2)\Big) = 0.3099$$

og approksimasjonsfeilen er

$$|\epsilon| \le h^4\frac{(b-a)}{180}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)| \le h^4\cdot\frac{1-0}{180}\cdot 30 = \frac{(0.25)^4}{6} = 0.00065\,.$$

Problem 8

La $y(x)$ være løsningen av

$$y' = \frac{-x}{y} \qquad \text{med} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk Eulers metode med $h = 0.1$ til å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1\,, \qquad x_2 = 0.2 \qquad \text{og} \qquad x_3 = 0.3\,.$$

(Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.)

Løsning

ODL er $y' = f(x,y) = \frac{-x}{y}$. Eulers metode er

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)\,.$$

Vi starter med $x_0 = 0$ og $y_0 = 1$ med $h = 0.1$, derfor

$$y_1 = 1\,, \qquad y_2 = 0.99\,, \qquad y_3 = 0.9698\,.$$