NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102/6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen: Magnus Landstad
Tlf:

Eksamensdato: 6. juni 2017
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.
- Alle 8 oppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☐
sort/hvit ☐	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (-2, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (4, 0)$ og der summen avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 10. Finn sentrum, halv-aksene og gi likningen til $\mathcal{E}$ på standard form.

Oppgave 2 En parametrisk kurve er gitt på formen

$$\vec{r}(t) = \left(t^2 \cos(2t), t^2 \sin(2t)\right) \qquad t \geq 0\,.$$

Finn hastigheten $\vec{v}$, farten $\boldsymbol{v}$, akselerasjonen $\vec{a}$ og baneakselerasjonen $\boldsymbol{a}$ til kurven $\vec{r}$.

Finn buelengden til kurven fra $t = 0$ til $t = 1$.

Oppgave 3 Finn Taylor-rekken $Tf(x)$ til funksjon $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ om punktet $a = 0$. For hvilke punkter $Tf(x) = f(x)$? (Hint: Start med Taylor-rekken til $g(x) = \frac{1}{1-x}$)

Oppgave 4 La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge slik at $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = C$.

a) Hva blir konvergensradius r for rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

b) Vist at da har også den integrerte rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ og den deriverte rekka $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ samme konvergensradius.

c) Se på rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

Finn konvergensintervallet og vis at rekka konvergerer uniformt her.

Oppgave 5 Finn løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$$

med $y(0) = 0$ og $y'(0) = 2$.

Oppgave 6 Bruk Eulers formel til å finne $\cos 3\theta$ og $\sin 3\theta$ uttryket ved $\cos\theta$ og $\sin\theta$.

Oppgave 7 Bruk Simpsons metode med skrittlengde $h = 0.25$ til å finne en numerisk approksimasjon av integralet

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \text{der} \qquad f(x) = \sin(x^2)\,.$$

Finn også approksimasjonsfeilen. (Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.) (Hint: du kan bruke at $\max_{0\le x\le 1} |f^{(4)}(x)| \le 30$).

Oppgave 8 La $y(x)$ være løsningen av

$$y' = \frac{-x}{y} \qquad \text{med} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk Eulers metode med $h = 0.1$ til å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1\,, \qquad x_2 = 0.2 \qquad \text{og} \qquad x_3 = 0.3\,.$$

(Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.)

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- Simpsons metode: $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n := \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\Big]$ der $f_i = f(x_i)$. Husk: n må være et partall.

  Hvis f er fjerderivert på $[a,b]$, så har vi

$$|\int_a^b f(x)\,dx - S_n| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \qquad \text{hvor } c \in [a,b]$$

- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Eulers midtpunktsmetode: $y_n = y_{n-1} + hf(x'_{n-1}, y'_{n-1})$
  der $(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} f(x_{n-1}, y_{n-1}))$.

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

Taylors formel med restledd

$$f(x) = T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

der c er et tall i det åpne intervallet mellom a og x.

Eulers formel

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

Kjeglesnitt

Ligning for kjeglesnitt med eksentresitet $\varepsilon \neq 1$ (dvs. ellipse eller hyperbel), *styrelinje* $x = L$ og *brennpunkt* i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)((x - \bar{x})^2 - a^2)\,,$$

der $\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$ er *sentrum* i kjeglesnitt og $a^2 = (\frac{\varepsilon(B-L)}{1-\varepsilon^2})^2$.

For $\varepsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2\,.$$