Setning 11.3.8: Uniform konvergens av følger av kontinuerlige funksjoner

La f og $f_1, f_2, \ldots$ være funksjoner på en mengde A. Anta at $f_1, f_2, \ldots$ kontinuerlige og at følgen $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f på A. Da er f kontinuerlig i A.

Setning 11.4.1: Integrasjon av funksjonsfølger

La $\{f_n\}$ være en følge av kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$ og la

$$g_n(x) = \int_c^x f_n(t)\mathrm{d}t,$$

der $c \in [a, b]$. Anta at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot en funksjon f på $[a, b]$.

Da konvergerer følgen $\{g_n\}$ uniformt mot funksjonen

$$g(x) = \int_c^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

på $[a, b]$.

Setning 11.4.3: Funksjonsfølger og derivasjon

La $\{f_n\}$ være en følge av kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$ og anta at de deriverte f'_n er kontinuerlige funksjoner som konvergerer uniformt mot en grensefunksjon h. Anta videre at det finnes (minst) en $d \in [a, b]$ slik at tallfølgen $\{f_n(d)\}$ konvergerer.

Da konvergerer $\{f_n\}$ uniformt mot en deriverbar funksjon f, og $f' = h$. Altså

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'.$$

SETNING 12.5.1: WIERSTRASS' M-TEST

La $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ være en rekke av funksjoner definert på en mengde A. Anta at det finnes en konvergent rekke (av tall) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ slik at

$$|v_n(a)| \leq M_n$$

for alle n og alle $a \in A$. Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ uniformt og absolutt på A.

Lemma 12.6.7: Uniform konvergens av potensrekker som konvergerer for ett punkt ("bortsett fra 0")

Anta at potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer for $x = b, b \neq 0$. Da konvergerer den absolutt for alle x med $|x| < |b|$. Konvergensen er uniform på ethvert intervall $[-c, c]$ med $0 < c < |b|$.

Setning 12.6.8: Kontinuitet av potensrekker

Anta at potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

har konvergensradius $r > 0$. Da er funksjonen

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

kontinuerlig i intervallet $(a-r, a+r)$. Dersom potensrekken konvergerer for alle $x \in R$, så er s kontinuerlig for alle x.

Setning 12.6.9: Abels teorem (kontinuitet i endepunktene)

Summen $s(x)$ av en potensrekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

er kontinuerlig i hele konvergensområdet. Hvis rekken konvergerer i det høyre endepunktet $a+r$, har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s(a+r) = \lim_{s \to a+r^-} s(x)$$

og hvis rekken konvergerer i det venstre endepunktet $a-r$ har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n = s(a-r) = \lim_{s \to a-r^+} s(x).$$