MA1102: OVERSIKT OVER STOFFET OM REKKER (V0.1)

Dette notatet er ingen erstatning for å lese læreboken. Henvisninger til sidetall, avsnitt mm er til T. Lindstrøm: "Kalkulus", 3. utgave. I tråd med at dette er en *grov oversikt* over rekkestoffet i MA1102, er formuleringen av enkelte setninger forenklet/ufullstendig, eller enkelte av forutsetningene er innforståtte. Når vi skriver $\sum a_k$ mener vi en uendelig rekke/sum, medmindre noe annet blir sagt. I formuleringen av rekketestene og -setningene er det mindre viktig om kan starter i $k = 0, -1, 1$ etc.

Det tas forbehold om skrivefeil. Gi beskjed om du finner noen eller om noe er uklart.

Konvergens. La $\{a_k\}$ være en følge av relle tall. La

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

dette er *delsummene* av (den uendelige) rekken

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Denne rekken *konvergerer med sum* s dersom grenseverdien $\lim_{n\to\infty} s_n$ eksisterer og $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Hvis en rekke ikke konvergerer, så sier vi at den divergerer.

Gitt en rekke har vi alltid disse to mulighetene: den konvergerer, eller den divergerer.

Det finnes ikke noen enkel, generell regel for når en rekke konvergerer.

Divergenstesten (12.1.4). Divergenstesten kan formuleres på to måter, som er logisk ekvivalente:

Hvis $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerer, så er $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Hvis $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, så divergerer $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

NB (og dette kan ikke gjentas for ofte): Divergenstesten sier IKKE at rekken konvergerer dersom grenseverdien av leddene er null, og dette er heller ikke riktig:

Rekken $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergerer selv om $\lim_{k\to\infty} 1/k = 0$.

Dersom $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ kan altså rekken $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergere eller divergere. For å avgjøre hva som skjer, må man se nærmere på rekken.

Geometriske rekker. La $a_0, r \neq 0$. Rekken $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k$ er en *geometrisk rekke med kvotient* r, og for geometriske rekker er spørsmålet om konvergens eller divergens enkelt:

Rekken $\sum_{k=1}^{\infty} a_0 r^k$ konvergerer dersom $|r| < 1$ og divergerer dersom $|r| \geq 1$.

Hvis rekken konvergerer er summen gitt ved

$$s = \frac{a_0}{1 - r}.$$

Date: 8. mars, 2016.

Summer (og differanser) av rekker (12.1.7, 12.1.8, 12.1.9). Hvis $\sum a_k$ og $\sum b_k$ konvergerer med $\sum a_k = A, \sum b_k = B$, har vi

- Rekken $\sum(a_k + b_k)$ konvergerer og $\sum(a_k + b_k) = A + B$
- Rekken $\sum(a_k - b_k)$ konvergerer og $\sum(a_k - b_k) = A - B$
- Hvis $c \in R$, så konvergerer rekken $\sum ca_k$ og $\sum ca_k = c \sum a_k = cA$.

Hvis $\sum b_k$ konvergerer og $\sum c_k$ divergerer, så diveregerer $\sum(b_k + c_k)$ og $\sum(b_k - c_k)$.

"De første m leddene har ingenting å si for konvergens eller divergens": La $m \in \mathbb{N}$; da er $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent hvis og bare hvis $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ er konvergent.

Begrensede rekker. Anta nå at $a_k \geq 0$ (eventuelt må man se på $|a_k|$).

Rekken $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerer hvis og bare hvis det finnes et tall $M > 0$ slik at $|\sum_{k=0}^{n} a_k| < M$ for alle n.

Integraltesten. La $f : [1, \infty) \to R$ være en kontinuerlig funksjon som er avtagende og positiv ($f(x) \geq 0$).

Rekken $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ konvergerer hvis og bare hvis (det uegentlige) integralet $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konvergerer.

Som regel vil f også være deriverbar slik at du kan vise at f er avtagende ved å vise at $f' < 0$.

Viktig eksempel. Ved hjelp av integraltesten kan man bevise at rekken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$. Spesielt divergerer rekken for $p = 1$ (som nevnt ovenfor).

Sammenligningstestene (12.2.6, 12.2.8). Gitt rekker $\sum a_k, \sum b_k$ med $a_k, b_k \geq 0$.

Hvis $\sum a_k$ konvergerer og det finnes et tall $c < \infty$ slik at $b_k \leq ca_k$, så konvergerer $\sum b_k$.

Hvis $\sum a_k$ divergerer og det finnes et tall $d > 0$ slik at $b_k \geq da_k$, så divergerer $\sum b_k$.

Hvis $\sum a_k$ konvergerer og $\lim_{k\to\infty} b_k/a_k = c < \infty$, så konvergerer $\sum b_k$.

Hvis $\sum a_k$ divergerer og $\lim_{k\to\infty} b_k/a_k = d > 0$, så divergerer $\sum b_k$.

Forholds- og rottestene (12.2.6, 12.2.8). Gitt en rekke $\sum a_k$ med $a_k \geq 0$, og la

$$a = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad \text{eller} \quad a = \lim_{k\to\infty} a_k^{1/k}.$$

Da gjelder

- Hvis $a < 1$ konvergerer $\sum a_k$.
- Hvis $a > 1$ divergerer $\sum a_k$.
- Hvis $a = 1$ kan vi ikke konkludere med noe.

Alternerende rekker. En rekke $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ er alternerende hvis annethvert ledd a_k er positivt og annet hvert ledd er negativt. Altså er $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k |a_k|$ (evt. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} |a_k|$).

Konvergenstesten for alternerende rekker. La $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ være en alternerende rekke, og anta at

- $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$,
- $|a_{k+1}| \leq |a_k|$.

Da konvergerer rekken. Hvis $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ og $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, så har vi

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Vi kan formulere dette siste som "dersom vi tilnærmer summen s av en alternerende rekke med den $n$te delsummen s_n, er feilen vi gjør ikke større i tallverdi enn det første utelatte leddet".

For å kunne bruke testen for alterende rekker *må* man både vise at leddene går mot null og at tallverdien deres er avtagende, ellers er det ikke alltid riktig at rekken konvergerer!

Absolutt og betinget konvergens. Gitt en rekke $\sum a_k$, der leddene kan være både positive og negative.

Rekken konvergerer *absolutt* dersom rekken $\sum |a_k|$ konvergerer; vi sier at rekken er *absolutt konvergent.*

En absolutt konvergent rekke er konvergent.

En rekke som konvergerer, men som ikke konvergerer absolutt, konvergerer *betinget*

Når vi sier at en rekke konvergerer betinget, sier vi implisitt både at den konvergerer og at den ikke konvergerer absolutt. En betinget konvergent rekke må inneholde både positive og negative ledd, for hvis den inneholder bare positive ledd, må den være absolutt konvergent siden $|a_k| = a_k$.

Rot- og forholdstestene kan brukes på $|a_k|$ for å undersøke absolutt konvergens/absolutt divergens.

Ombytting av ledd. Hvis en rekke $\sum a_k$ konvergerer absolutt mot summen s, så konvergerer ethvert ombytte av rekken mot s (12.4.10).

Hvis en rekke $\sum a_k$ er betinget konvergent finnes der for hvert reelt tall s et ombytte $\sum a_{n_k}$ som konvergerer mot s (12.4.12).

Dette siste utsagnet virker underlig, og er det kanskje. Det innebærer at betinget konvergente rekker bare "såvidt" er konvergente.

Weierstrass' M-test. La $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ være en rekke av funksjoner $v_k \colon A \to R$. Hvis det finnes en følge av tall $\{M_k\}$ slik at $|v_k(x)| \leq M_k$ for alle $x \in A$ og alle k, og slik at $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ uniformt og absolutt på A.

Potensrekker. Potensrekker er rekker på formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, x \in \mathbb{R}.$$

Dersom en potensrekke konvergerer, blir summen en funksjon av x. Rekken konvergerer alltid for $x = a$.

Merk at vi for $k = 0$ alltid bruker følgende tolkning: $(x-a)^0 = 1$ (medmindre noe annet blir sagt). Da slipper vi å ta upraktiske forbehold.

Vi kan oppsummere det meste vi har vært gjennom om potensrekker som følger.

Gitt en potensrekke $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$. Da har vi alltid en av de tre følgende situasjonene:

- Rekken konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$.
- Rekken konvergerer *kun* for $x = a$.
- Det finnes et tall $r > 0$ (konvergensradien til rekken) slik at rekken konvergerer i $(a-r, a+r)$ (konvergensintervallet til rekken) og divergerer for $|x-a| > r$. (Det finnes rekker som ikke konvergerer i noen av intervallendepunktene, som konvergerer i kun ett av dem eller i begge, så dette krever alltid ekstra oppmerksomhet!)

Vi antar fra nå av at vi er i den siste situasjonen (vi kan godta den første situasjonen her også). Da gjelder følgende

- Potensrekken konvergerer absolutt for alle $x \in (a-r, a+r)$ (12.6.7).
- Potensrekken konvergerer uniformt i ethvert lukket delintervall $[a-t, a+t] \subset (a-r, a+r)$ (12.6.7).
- Funksjonen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ er en deriverbar (og dermed kontinerlig) funksjon i $(a-r, a+r)$ (12.7.3).
- Hvis $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ konvergerer for $x = a+r$ (det høyre intervallendepunktet), så er f kontinerlig i $(a-r, a+r]$. Tilsvarende for $x = a-r$ (12.6.9).
- Vi har at $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ i $(a-r, a+r)$ (12.7.3).
- Vi har at $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$ (12.7.1).
- Konvergensradien for de deriverte og antideriverte funksjonene er de samme som for f (men det er mulig at konvergens i endepunktene endrer seg).
- Dersom $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ og $Tf(x)$ er Taylor-rekken til f i a så er
$$Tf(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k,$$
og $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ (12.8.3).

Så dersom en funksjon er gitt ved en konvergent potensrekke, så konvergerer Taylor-rekken mot den samme funksjonen. MEN: gitt en vilkårlig funksjon f som er uendelig mange ganger deriverbar, så er det ikke sikkert at Tf konvergerer mot f (bortsett fra i $x = a$).

For orden skyld: Taylor-rekken til en uendelig mange ganger deriverbar funksjon f om a er gitt ved
$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Produkter av potensrekker - Cauchyproduktet. Gitt to konvergente potensrekker $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)$. Dersom $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, så er $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ konvergent, med konvergensradius minst lik den minste av konvergensradiene til a- og b-rekkene.

Rekken $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ kalles Cauchy-produktet av $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)$.

Binomiske rekker (12.10). Dersom $\alpha \in \mathbb{R}$ definerer vi
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$
Dersom $\alpha \in \mathbb{N}$, er dette en ordinær binomialkoeffisient.

For alle $\alpha \in \mathbb{R}$ og $x \in (-1, 1)$ har vi
$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{k}x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$
Dersom $\alpha \in \mathbb{N}$ er rekken til høyre endelig, og vi får det ordinære binomialteoremet (12.10.1).

Det er lett å vise at rekken til høyre konvergerer (forholdstesten), men beviset for at denne rekken konverger mot funksjonen til venstre er skarpsindig.