# NUMERISKE METODER FOR Å LØSE FØRSTE ORDENS DIFFERENSIALLIGNINGER

I MA1102 ser vi på tre metoder for numerisk løsning av 1. ordens differensialligninger: **Eulers metode**, **Eulers midtpunktmetode** (også kalt **forbedret Eulers metode**) og **4. ordens Runge-Kuttta**. Løsningsmetoden for Runge-Kutta må betraktes utelukkende som kursorisk pensum. Det er imidlertid viktig å være klar over at denne metoden svært ofte er den som brukes i praksis, i mange forskjellige sammenhenger og anvendelser.

Her skal vi se på de tre metodene brukt på differensialligningen

$$y' = f(x, y) = y,$$

med startbetingelsen $x_0 0 = 0, \quad y_0 = y(x_0) = 1$ over intervallet $[0, 1]$. Dette er det samme eksempelet som brukes i læreboken. Vi kjenner selvfølgelig den eksakte løsningen av initialverdiproblemet: $y = e^x$. Det er viktig å være klar over at når jeg har tegnet inn den "eksakte løsningen" i figurene nedenfor, så er det selvsagt ikke riktig: den "eksakte" løsningen er også en tilnærming, men beregnet med en annen numerisk metode (i dette tilfellet Matlabs standardmetode).

| Skritt nummer | | **Euler** | **Euler midtpunkt** | **4. ordens RK** |
|---|---|---|---|---|
| 0, | $x_0 = 0$ | $y_0 = 1$ | $y_0 = 1$ | $y_0 = 1$ |
| 1, | $x_1 = h = 0,2$ | $y_1 = 1,2$ | $y_1 = 1,22$ | $y_1 = 1,2214$ |
| 2, | $x_2 = 2h = 0,4$ | $y_2 = 1,44$ | $y_2 = 1,4884$ | $y_2 = 1,49181796$ |
| 3, | $x_3 = 3h = 0,6$ | $y_3 = 1,728$ | $y_3 = 1,815848$ | $y_3 = 1,822106456344$ |
| 4, | $x_4 = 4h = 0,8$ | $y_4 = 2,0736$ | $y_4 = 2,21533456$ | $y_4 = 2,22552082577856$ |
| 5, | $x_5 = 5h = 1$ | $y_5 = 2,48832$ | $y_5 = 2,7027081632$ | $y_5 = 2,71825113660594$ |

TABLE 1. Numerisk løsning av $y' = f(x, y) = y$ med $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$ over intervallet $[0, 1]$, ved Eulers metode, Eulers midtpunktmetode og 4. ordens Runge-Kutte. Skrittlengde: $h = 0.2$. Svart kurve: "eksakt løsning".

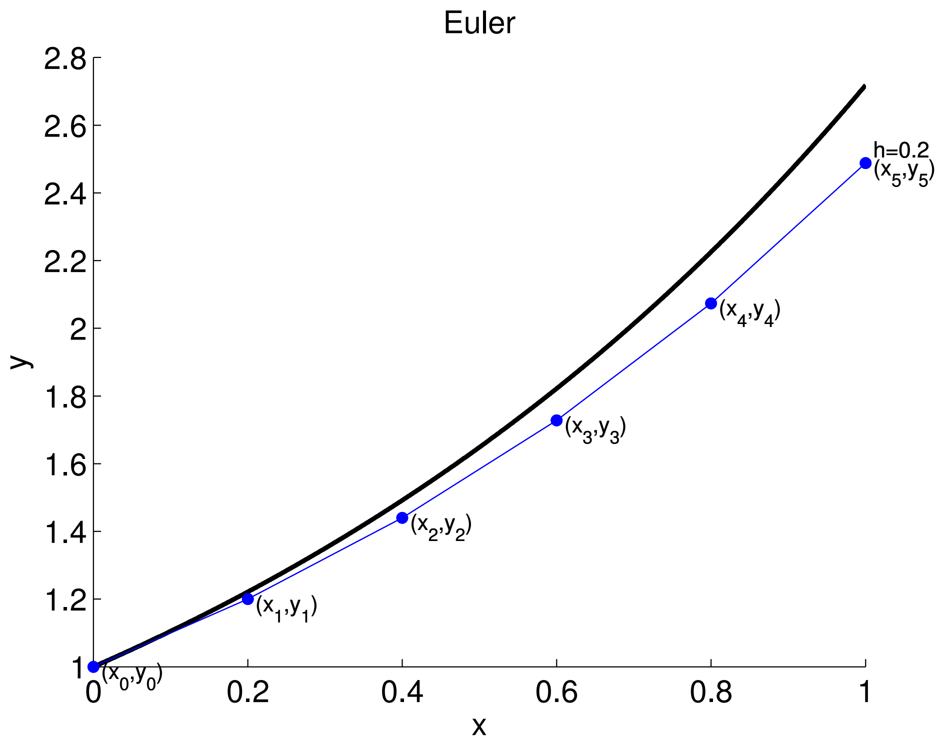


FIGURE 1. Numerisk løsning av $y' = f(x,y) = y$ med $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$ over intervallet $[0,1]$, ved Eulers metode. Skrittlengde: $h = 0,2$. Svart kurve: "eksakt" løsning.

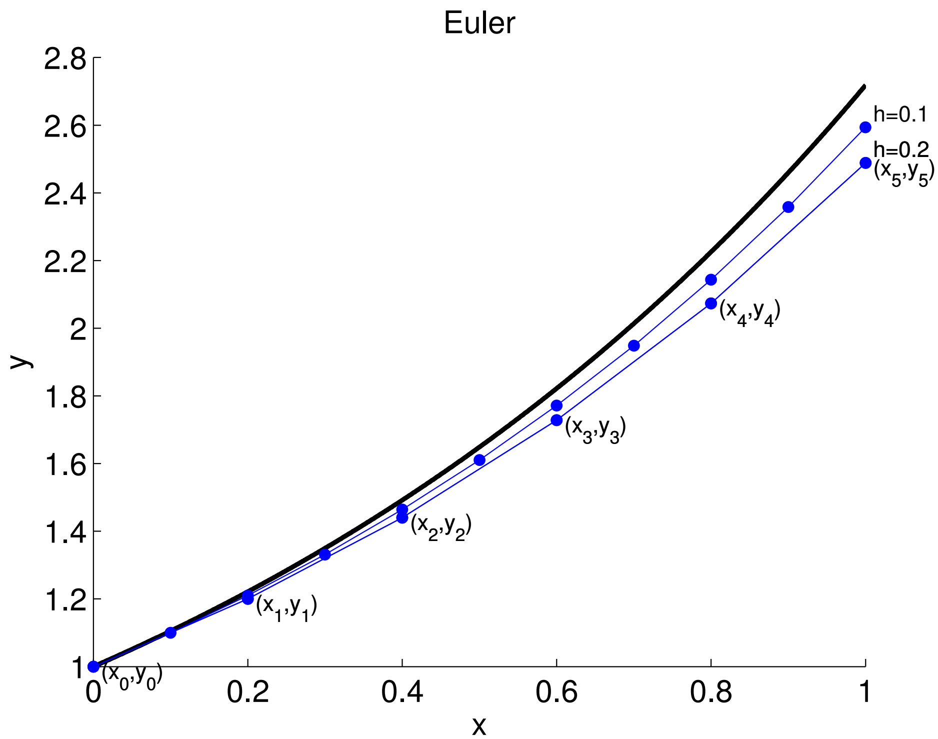


FIGURE 2. Numerisk løsning av $y' = f(x, y) = y$ med $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$ over intervallet $[0, 1]$, ved Eulers metode. Sammenligning av skrittlengdene $h = 0,1$ og $h = 0,2$. Svart kurve: "eksakt" løsning.

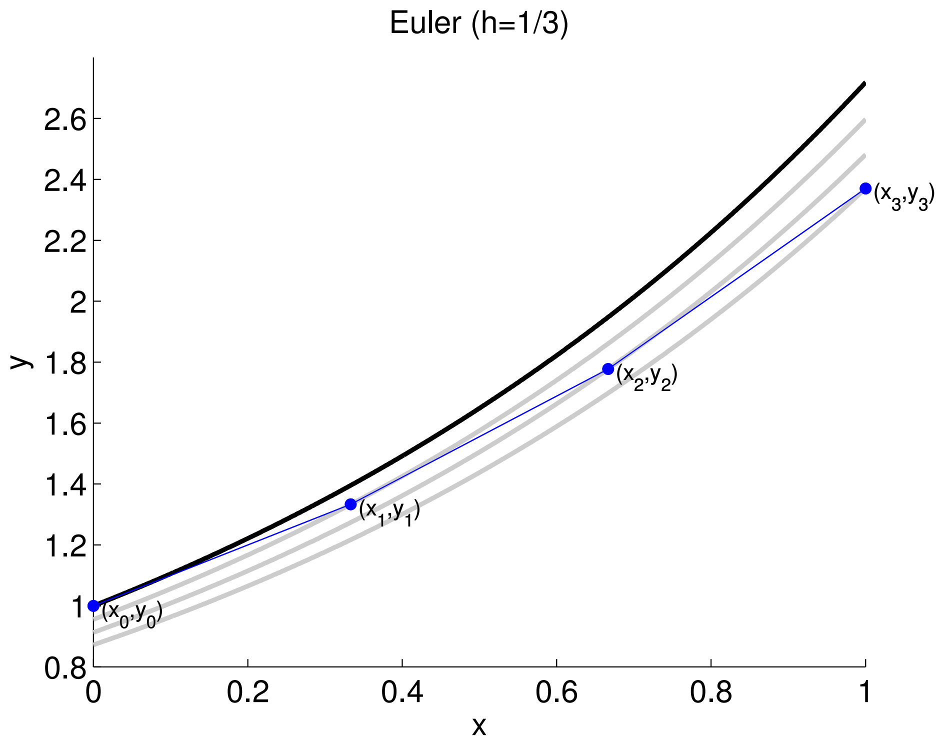


FIGURE 3. Numerisk løsning av $y' = f(x,y) = y$ med $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$ over intervallet $[0,1]$, ved Eulers metode. Skrittlengde $h = 1/3$. Svart kurve: den "eksakte" løsningen vi er ute etter. Grå kurver: eksakte løsninger som går gjennom $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)$.

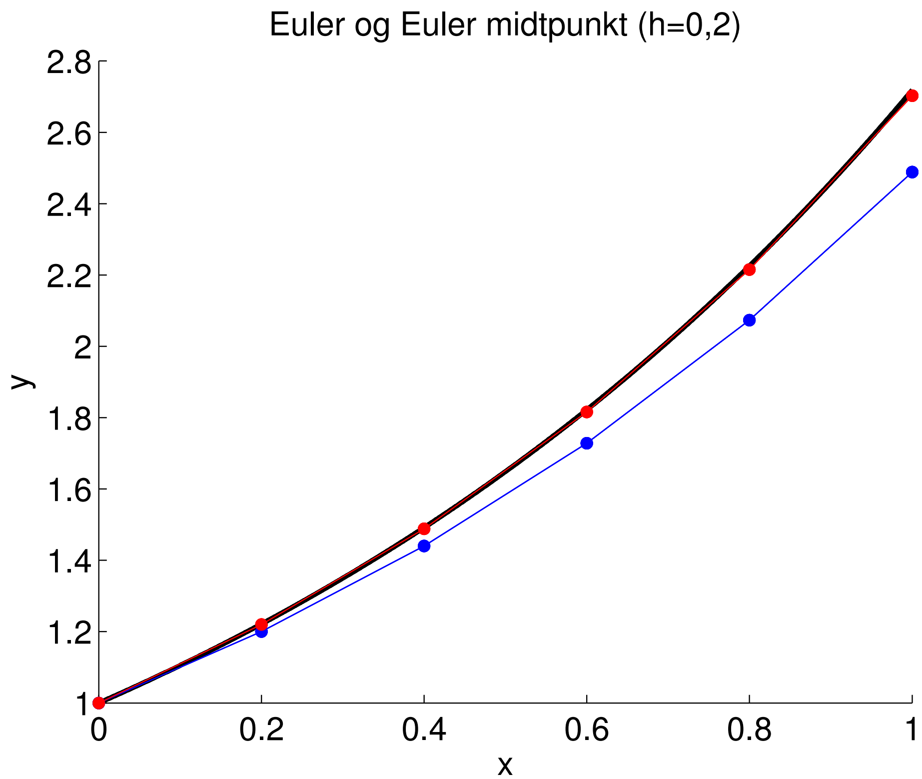


FIGURE 4. Numerisk løsning av $y' = f(x,y) = y$ med $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$ over intervallet $[0,1]$. Sammenligning av Eulers metode (blå kurve) og Eulers midtpumnktmetode (rød kurve). Skrittlengdene for begge metoder: $h = 0,2$. Svart kurve: "eksakt" løsning.

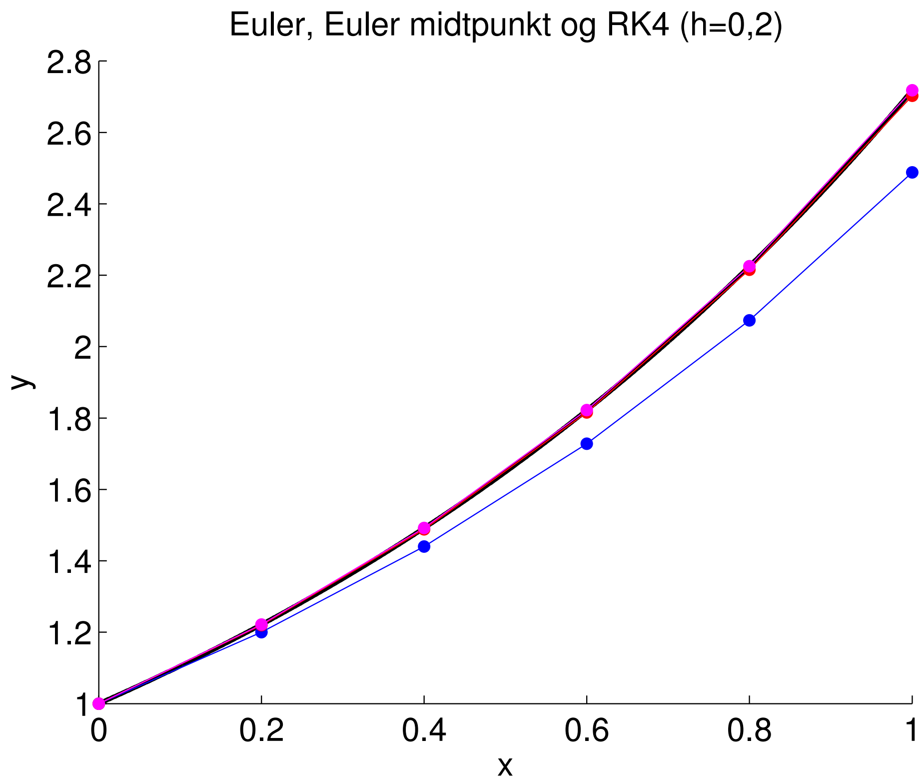


FIGURE 5. Numerisk løsning av $y' = f(x, y) = y$ med $x_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$ over intervallet $[0, 1]$. Sammenligning av Eulers metode (blå kurve), Eulers midtpumnktmetode (rød kurve) og 4. ordens Runge-Kutta (lilla kurve). Skrittlengde: $h = 0,2$. Svart kurve: "eksakt løsning". RK overlapper nesten helt med den "eksakte" løsningen.