Løsningsforslag — Øving 4

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bare oppgaver det ikke er fasit for i boken skrives det løsningsforslag for.

11.2:12 **a)** Taylor-polynomet til $f(x) = \cos(x)$ av orden 3 rundt origo er $T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ (merk at siden $\cos(x)$ er en like-funksjon vil Taylor-polynomet om origo inneholde bare partallseksponenter av x, dermed blir $T_3(x) = T_2(x)$). La $Rf_3(x)$ betegne restleddet, altså $Rf_3(x) = \frac{\cos^{(4)}(c)}{4!}x^4$, hvor $c \in (0, x)$. Ettersom $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$, har vi at

$$|Rf_3(x)| \leq \frac{x^4}{4!}. \tag{1}$$

b) Putter vi x^2 for x inn i Taylor-polynomet til $\cos(x)$ over, får vi

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{\cos^{(4)}(c)}{4!}x^8, \tag{2}$$

hvor $c \in (0, x^2)$. Da får vi at

$$\begin{aligned}\int_0^t \cos(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_0^t 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{\cos^{(4)}(c(x))}{4!}x^8\,\mathrm{d}x \\ &= t - \frac{t^5}{10} + \int_0^t \frac{\cos^{(4)}(c(x))}{4!}x^8\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

hvor $c(x)$ indikerer at c kan avhenge av x. Det siste integralet vil være $F(t)$ i oppgaveteksten. Vi har at

$$\left|\int_0^t \frac{\cos^{(4)}(c(x))}{4!}x^8\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^t \left|\frac{\cos^{(4)}(c(x))}{4!}x^8\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^t \frac{x^8}{4!}\,\mathrm{d}x = \frac{|t|^9}{216}. \tag{3}$$

c) Heldigvis er $\frac{0.1^9}{216} < 10^{-11}$, og dermed er $|\int_0^{0.1}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x - (0.1 - \frac{0.1^5}{10})| \leq |F(0.1)| < 10^{-11}$. Altså er

$$\int_0^{0.1}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \approx 0.1 - \frac{0.1^5}{10} = 0.1000010000 \tag{4}$$

med 10 desimalers nøyaktighet.

2 Ettersom den $(n+1)$-te deriverte til f eksisterer og er kontinuerlig i et omegn om punktet a, vil

$$f(x) = T_nf(x) + R_nf(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{5}$$

i et omegn om a. Videre vil $f^{(n+1)}(c)$, hvor $c \in (x, a)$ være begrenset når x er tilstrekkelig nær a, la oss si $|f^{(n+1)}(c)| < M$ når $|x-a| < \varepsilon$ for en $\varepsilon > 0$. Altså vil

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} \right| \leq \lim_{x \to a} M(x-a) = 0. \tag{6}$$

Vi har da at

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1}]}{(x-a)^n} \\
&\quad = \lim_{x \to a} \frac{T_n f(x) + R_n f(x) - [a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_{n-1}(x-a)^{n-1}]}{(x-a)^n} \\
&\quad = \lim_{x \to a} \frac{a_n(x-a)^n + R_n f(x)}{(x-a)^n} \\
&\quad = a_n + \lim_{x \to a} \frac{R_n f(x)}{(x-a)^n} \\
&\quad = a_n,
\end{aligned}$$

hvor den siste likheten følger fra (6).