NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen: Eduard Ortega

Tlf: 46760087

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: (Kode D): Tillatt enkel kalkulator

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd. Alle de 10 deloppgaver av eksamen har samme vekt for beregning av endelig karakter.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Gitt ligningen til et ikke-degenerert kjeglesnitt

$$3x^2 - 6x + 4y^2 = 0\,.$$

Bestem hvilken type kjeglesnitt dette er, og finn eksentrisitet og sentrum.

Oppgave 2 En parametrisk kurve er gitt på formen

$$\vec{r}(t) = \left(e^t - t, 4e^{t/2}\right) \qquad t \geq 0\,.$$

Finn hastigheten $\vec{v}$, farten $\boldsymbol{v}$, akselerasjonen $\vec{a}$ og baneakselerasjonen $\boldsymbol{a}$ til kurven $\vec{r}$.

Finn buelengden til kurven fra $t = 0$ til $t = 1$.

Oppgave 3

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$2y'' + 2y' + y = 0\,.$$

b) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$2y'' + 2y' + y = x^2 + x + 1\,.$$

c) Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ til differensialligningen

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

som tilfredsstiller $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 4 La $y(x)$ være funksjonen som løser differensiallingingen

$$y' = ye^x \qquad \text{og} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk Eulers metode med $h = 0{,}1$ for å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0{,}1 \qquad x_2 = 0{,}2 \qquad x_3 = 0{,}3 \qquad \text{og} \qquad x_4 = 0{,}4\,.$$

(Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.)

Oppgave 5 Evaluer integralet

$$\int_0^2 e^{\sin(x)} dx$$

numerisk med Simpsons metode slik at approksimasjonsfeilen er mindre enn 0,001. Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine. (Bruk at maksverdien til $|f^{(4)}(x)|$ på intervallet $[0, 2]$ er $4e^1$).

Oppgave 6

a) Finn Taylor-polynomet til $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ av grad 3 om punktet 1, og bruk det for evaluere

$$\int_1^2 e^{-\frac{1}{x}}\, dx\,.$$

Finn feilestimat. (Bruk at maksverdien til $|f^{(4)}(x)|$ på intervallet $[1, 2]$ er e^{-1}).

b) Finn konvergensområdet til potensrekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n\,, \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n\,.$$

Oppgave 7 La følgen $\{f_n(x)\}$ være gitt ved

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \qquad x \in (0, \infty)\,.$$

Bestem funksjonen $f(x)$ slikt at $\{f_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$.

Konvergerer $\{f_n(x)\}$ uniformt mot $f(x)$?

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- Simpsons metode: $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n := \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\Big]$ der $f_i = f(x_i)$. Husk: n må være et partall.

  Hvis f har en kontinuerlig fjerderivert på $[a, b]$, så har vi

  $$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \qquad \text{hvor } c \in [a, b]$$

- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Eulers midtpunktsmetode: $y_n = y_{n-1} + hf(x'_{n-1}, y'_{n-1})$
  der $(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} f(x_{n-1}, y_{n-1}))$.
- Runge–Kuttas metode:
  $\mathbf{m}_1 = \mathbf{f}(x_n, y_n)$, $\mathbf{m}_2 = \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\mathbf{m}_1)$,
  $\mathbf{m}_3 = \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\mathbf{m}_2)$, $\mathbf{m}_4 = \mathbf{f}(x_n + h, y_n + h\mathbf{m}_3)$,
  $\mathbf{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(\mathbf{m}_1 + 2\mathbf{m}_2 + 2\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4)$.

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Taylors formel med restledd

$$f(x) = T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

der c er et tall i det åpne intervallet mellom a og x.

Kjeglesnitt

Ligning for kjeglesnitt med eksentrisitet $\varepsilon \neq 1$ (dvs. ellipse eller hyperbel), *styrelinje* $x = L$ og *brennpunkt* i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)((x - \bar{x})^2 - a^2)\,,$$

der $\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$ er *sentrum* i kjeglesnittet og $a^2 = (\frac{\varepsilon(B-L)}{1-\varepsilon^2})^2$.

For $\varepsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2\,.$$