Introduksjon til kjeglesnitt

Forfatter:
Eduard Ortega

1 Introduksjon

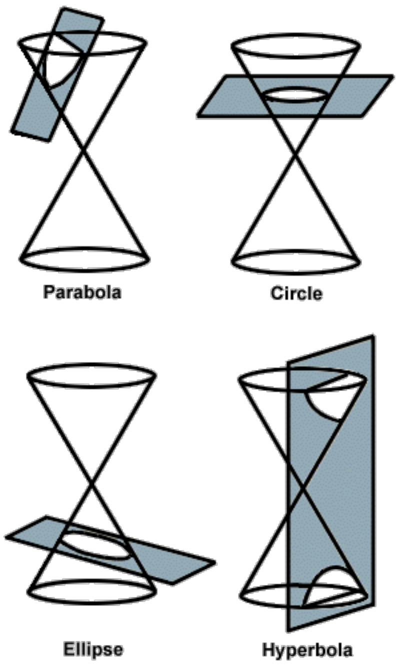
Et kjeglesnitt er en todimensjonal figur som beskrives ved skjæringen mellom et plan og en rett, sirkulær kjegle. Alle kjeglesnitt kan beskrives med følgende ligning:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

De fire kjeglesnittene vi vil undersøke i denne teksten er parabler, ellipser, sirkler, og hyperbler. Ligningene for hvert av disse kjeglesnittene kan skrives på en standardisert form, som tillater oss å si mye om kjeglesnittets form uten å tegne det. Vi skal undersøke standardformene og grafene til disse fire kjeglesnittene.

1.1 Generell definisjon

Et kjeglesnitt er skjæringen mellom et plan og en rett, sirkulær kjegle. De fire grunnleggende typene kjeglesnitt er parabler, ellipser, sirkler, og hyperbler. Studer figurene under for å se hvordan et kjeglesnitt er definert geometrisk.



I et *ikke-degenerert kjeglesnitt* vil planet ikke gå gjennom toppunktet på kjeglen. Når planet går gjennom toppunktet på kjegle, kalles det resulterende kjeglesnittet for et *degenerert kjeglesnitt*. Degenererte kjeglesnitt inkluderer et punkt, en linje, og to kryssende linjer.

Ligningen for alle kjeglesnitt kan skrives på følgende form:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Dette er den algebraiske definisjonen på et kjeglesnitt. Kjeglesnitt kan klassifiseres ved hjelp av koeffisientene i denne ligningen.

Diskriminanten til ligningen er $B^2 - 4AC$. Dersom vi antar at kjeglesnittet ikke er degenerert, gjelder følgende:

1. Dersom $B^2 - 4AC < 0$, er kjeglesnittet en *sirkel* (hvis $B = 0$ og $A = C$), eller en *ellipse*.

2. Dersom $B^2 - 4AC = 0$, er kjeglesnittet en *parabel*.

3. Dersom $B^2 - 4AC > 0$, er kjeglesnittet en *hyperbel*.

Selv om det er mange ligninger som beskriver kjeglesnitt, viser følgende tabell *standardform* av ligningene for ikke-degenererte kjeglesnitt.

Standardligninger for ikke-degenererte kjeglesnitt	
Sirkel	$x^2 + y^2 = a^2$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parabel	$y^2 - 4ax = 0$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

1.2 Eksempler

1. Er dette kjeglesnittet en parabel, ellipse, sirkel, eller hyperbel: $-3x^2 + y + 2 = 0$? Det er en parabel.

2. Er det følgende kjeglesnittet en parabel, ellipse, sirkel, eller hyperbel: $2x^2 + 3xy - 4y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$? Det er en hyperbel.

3. Er det følgende kjeglesnittet en parabel, ellipse, sirkel, eller hyperbel: $2x^2 - 3y^2 = 0$? Det er en hyperbel.

4. Er det følgende kjeglesnittet en parabel, ellipse, sirkel, eller hyperbel: $-3x^2 + xy - 2y^2 + 4 = 0$? Det er en ellipse.

5. Er det følgende kjeglesnittet en parabel, ellipse, sirkel, eller hyperbel: $x^2 = 0$? Det er et degenerert kjeglesnitt. $x = 0$ er en linje.

6. Er det følgende kjeglesnittet en parabel, ellipse, sirkel, eller hyperbel: $x^2 - y^2 = 0$? Det er et degenerert kjeglesnitt. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0$ er to rette linjer som skjærer hverandre.

7. Er det følgende kjeglesnittet en parabel, ellipse, sirkel, eller hyperbel: $x^2 + y^2 = 0$? Det er et degenerert kjeglesnitt. Det eneste punktet som oppfyller ligningen $x^2 + y^2 = 0$ er $(0,0)$.

1.3 Geometrisk definisjon

La ε være et positivt tall, *eksentrisiteten*, ℓ en linje, *styrelinjen*, og $\mathcal{B}$ et punkt, *brennpunktet*. Trippelen $(\varepsilon, \ell, \mathcal{B})$ definerer da et kjeglesnitt på følgende måte:

$\mathcal{P}$ er et punkt på kjeglesnittet definert av $(\varepsilon, \ell, \mathcal{B})$ hvis

$$|\mathcal{PB}| = \varepsilon \cdot |\mathcal{P}\ell|$$

$|\mathcal{PB}|$ står for avstanden fra punktet $\mathcal{P}$ til punktet $\mathcal{B}$, og $|\mathcal{P}\ell|$ for korteste avstand fra punktet $\mathcal{P}$ til linjenℓ.

Dersom brennpunktet $\mathcal{B}$ ikke ligger på styrelinja ℓ, gjelder følgende:

1. Dersom $0 < \varepsilon < 1$, er kjeglesnittet en ellipse.

2. Dersom $\varepsilon = 1$ er kjeglesnittet en parabel.

3. Dersom $\varepsilon > 1$ er kjeglesnittet en hyperbel.

Dersom brennpunket $\mathcal{B}$ ligger på styrelinjen ℓ, gjelder følgende:

1. Dersom $0 < \varepsilon < 1$ er kjeglesnittet et punkt.

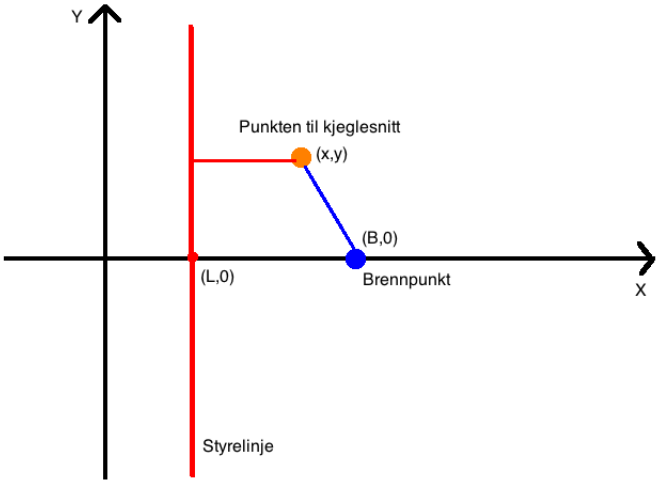
2. Dersom $\varepsilon = 1$ er kjeglesnittet en linje.

3. Dersom $\varepsilon > 1$ er kjeglesnittet to linjer som krysser hverandre.

Vi kan nå merke oss at punktet er en degenerert ellipse, linja er en degenerert parabel, og de to kryssende linjene er en degenerert hyperbel.

2 Ikke-degenererte kjeglesnitt

Gitt en eksentrisitet ε, en styrelinje ℓ, og et brennpunkt $\mathcal{B}$ som ikke ligger i ℓ, kan vi definere et kjeglesnitt. For enkelhet vil vi anta at ℓ er på formen $x = L$ og $\mathcal{B} = (B, 0)$, hvor $L < B$. Vi vil senere se at ved rotasjon og translasjon kan vi alltid redusere til denne situasjonen.



I dette tilfellet, gitt et punkt $\mathcal{P} = (x, y)$, har vi at

$$|\mathcal{PB}| = \sqrt{(x-B)^2 + y^2} \qquad og \qquad |\mathcal{P}\ell| = \sqrt{(x-L)^2}.$$

Da kan relasjonen $|\mathcal{PB}| = \varepsilon \cdot |\mathcal{P}\ell|$ skrives på følgende måte:

$$\sqrt{(x-B)^2 + y^2} = \varepsilon\sqrt{(x-L)^2}.$$

Da har vi

$$(\sqrt{(x-B)^2 + y^2})^2 = (\varepsilon\sqrt{(x-L)^2})^2$$

som er ekvivalent med

$$\boxed{(x-B)^2 + y^2 = \varepsilon^2(x-L)^2\,.}$$

Dette er den *generelle ligningen for et kjeglesnitt*. Vi vil nå studere hvordan ulike verdier av eksentrisiteten ε gir ulike typer kjeglesnitt.

2.1 Ellipse

Vi antar at $0 < \varepsilon < 1$. Først regner vi ut skjæringen mellom kjeglesnittet og x-aksen. For å gjøre det erstatter vi $y = 0$ i den generelle ligningen for et kjeglesnitt, slik at vi får ligningen

$$(x-B)^2 = \varepsilon^2(x-L)^2\,.$$

Dette er ekvivalent med ligningen

$$\sqrt{(x-B)^2} = \pm\sqrt{\varepsilon^2(x-L)^2}\,,$$

så vi får

$$(x-B) = \pm\varepsilon(x-L)\,.$$

Her har vi to muligheter: Først tar vi ligningen

$$(x-B) = -\varepsilon(x-L)\,,$$

som er lik

$$(1+\varepsilon)x = B + \varepsilon L\,.$$

Altså er det første skjæringspunktet med x-aksen

$$\boxed{x_1 = x = \tfrac{B+\varepsilon L}{1+\varepsilon}\,.}$$

Deretter ser vi på ligningen

$$(x-B) = +\varepsilon(x-L)\,,$$

som er lik

$$(1-\varepsilon)x = B - \varepsilon L\,,$$

altså er det andre skjæringspunktet med x-aksen lik

$$\boxed{x_2 = x = \tfrac{B-\varepsilon L}{1-\varepsilon}\,.}$$

En enkel utregning viser at $x_1 < x_2$.

Definisjoner	
Sentrum	$\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$
Store halvakse	$a = \frac{x_2-x_1}{2}$
Lille halvakse	$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Med disse definisjonene kan vi omskrive den generelle likningen på følgende måte

$$\boxed{\tfrac{(x-\bar{x})^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1\,,}$$

som vi kaller *standardlikningen for ellipsen.*

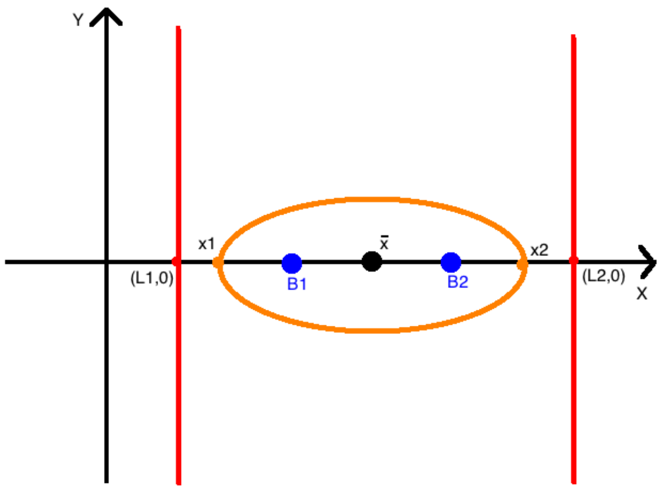
Motsatt,

$\frac{(x-\bar{x})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
Eksentrisitet	$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$
Styrelinje	$L=\bar{x}-\frac{a}{\varepsilon}$
Brennpunkt	$B=\bar{x}-\varepsilon\cdot a$

Fra standardlikningen for ellipser kan man observere at ellipsen er symmetrisk relativt til den vertikale linjen $x=+\bar{x}$. Derfor definerer vi

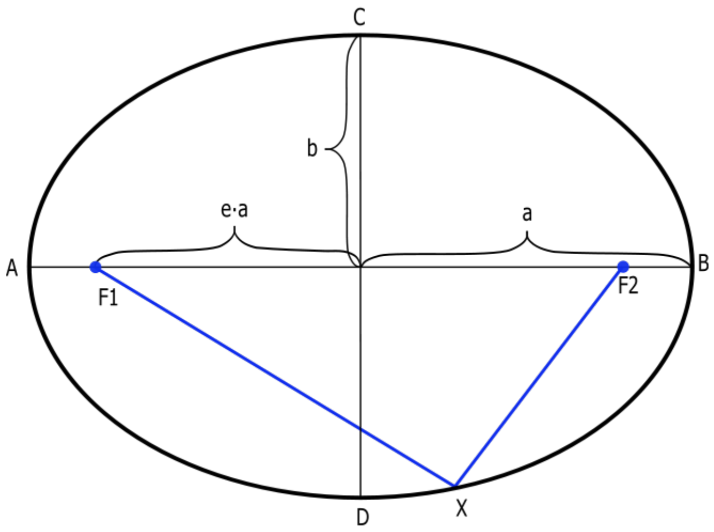
$$B_2=\bar{x}+\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{L}_2=\bar{\mathrm{x}}+\frac{\mathrm{a}}{\varepsilon}$$

. Vi har at trippelen gitt av eksentrisiteten ε, brennpunktet $\mathcal{B}_2=(B_2,0)$, og styrelinjen ℓ_2 gitt ved $x=L_2$, bestemmer samme kjeglesnitt som $(\varepsilon,\mathcal{B},\ell)$. Dermed kalles $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}$ og $\mathcal{B}_2$ ellipsens brennpunkter.



Gitt ellipsens to brennpunkter $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ kan vi gi en alternativ geometrisk beskrivelse, på følgende måte: En ellipse er settet av alle punkter som oppfyller betingelsen at summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik $2a$, altså

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}_1|+|\mathcal{P}\mathcal{B}_2|=2a$$



2.1.1 Eksempler

1. Finn likningen til ellipsen med eksentrisitet $\varepsilon = 1/3$, styrelinje $x = -1$ og brennpunkt $\mathcal{B} = (1, 0)$. Ved hjelp av formlene har vi da

$$x_1 = \frac{1 + 1/3(-1)}{1 + 1/3} = \frac{2/3}{4/3} = 1/2 \qquad x_2 = \frac{1 - 1/3(-1)}{1 - 1/3} = \frac{4/3}{2/3} = 2$$

og sentrum i ellipsen er dermed

$$\bar{x} = \frac{1/2 + 2}{2} = 5/4\,,$$

og

$$a = \frac{2 - 1/2}{2} = 3/4 \qquad b = 3/4 \cdot \sqrt{1 - (1/3)^2} = 3/4 \cdot \sqrt{8/9} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Altså blir likningen

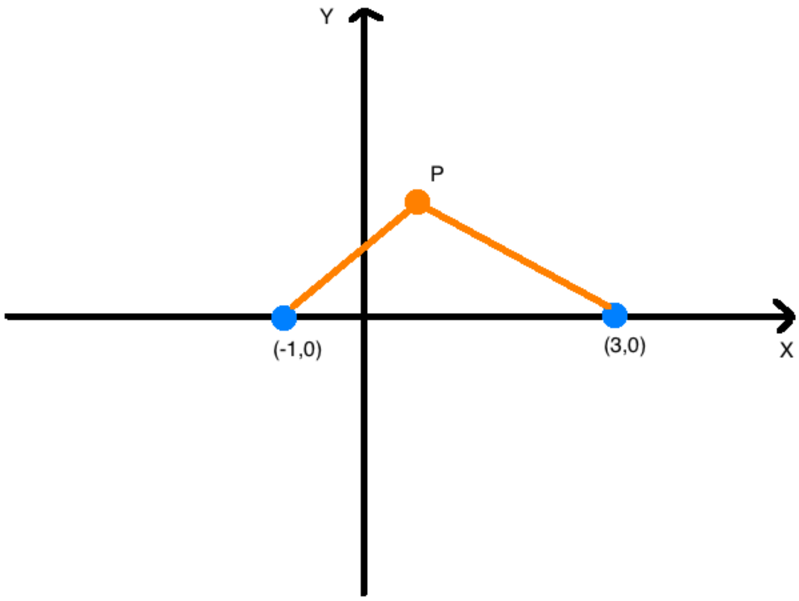
$$\frac{(x - 5/4)^2}{(3/4)^2} + \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1\,,$$

så

$$\boxed{\tfrac{16(x-5/4)^2}{9} + 2y^2 = 1}$$

2. La $\mathcal{B}_1 = (-1, 0)$ g $\mathcal{B}_2 = (3, 0)$ være to punkter i planet. vi vil finne likningen til ellipsen hvor alle punkter $\mathcal{P}$ på ellipsen oppfyller

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| + |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 6\,.$$



Merk først at formlene gir at $2a = 6$, og dermed $a = 3$. Sentrum i ellipsen er midtpunktet mellom $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$. Vi sier $\bar{x} = 1$. Vi skal nå regne ut eksentrisiteten, som fra formlene over er gitt ved

$$|\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2| = 2a\varepsilon\,,$$

så vi har at $4 = 2 \cdot 3 \cdot \varepsilon$, og dermed $\varepsilon = 2/3$. Til sist har vi at $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, så $b = 3\sqrt{5/9} = \sqrt{5}$. Dermed blir likningen til ellipsen

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1}$$

2.2 Parabel

Vi antar at $\varepsilon = 1$, som gir betingelsen

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}| = \varepsilon \cdot |\mathcal{P}\ell|\,,$$

som er punktene $\mathcal{P}$ i planet som er like langt fra brennpunktet $\mathcal{B}$ som fra styrelinja ℓ.

Da reduseres likningen for kjeglesnittet til

$$(x-B)^2 + y^2 = (x-L)^2\,,$$

og vi kan skrive det som

$$y^2 = (x-L)^2 - (x-B)^2 = x^2 - 2xL + L^2 - x^2 + 2xB - B^2 = 2(B-L)x + (L^2 - B^2)\,,$$

altså

$$\boxed{y^2 = 2(B-L)x + (L^2 - B^2)}$$

Hvis vi vil finne skjæringen mellom kjeglesnittet og x-aksen, setter vi inn $y = 0$ i likningen over. Da får vi

$$0 = 2(B-L)x + (L^2 - B^2)$$

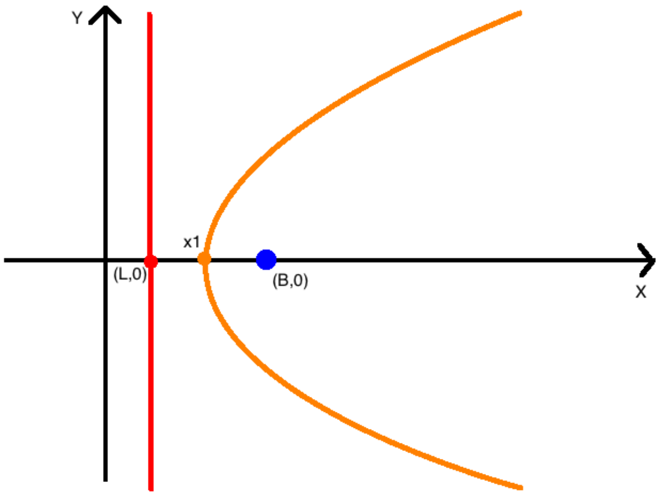
som er lik

$$2(L-B)x = (L^2 - B^2) = (L-B)(L+B)$$

som etter at vi stryker bort $(L-B)$-leddet gir

$$\boxed{x_1 = x = \tfrac{L+B}{2}}$$

som vi kaller parabelens *ekstremalpunkt*.



2.3 Hyperbel

Vi antar at $\varepsilon > 1$. Først finner vi skjæringen mellom kjeglesnittet og x-aksen. For å gjøre det må vi sette inn $y = 0$ i den generelle likningen for kjeglesnitt, og vi får likningen

$$(x-B)^2 = \varepsilon^2 (x-L)^2 \,.$$

Dette er ekvivalent med likningen

$$\sqrt{(x-B)^2} = \pm\sqrt{\varepsilon^2 (x-L)^2} \,,$$

så vi har

$$(x-B) = \pm\varepsilon(x-L) \,,$$

Her har vi to muligheter: Først ser vi på likningen

$$(x - B) = -\varepsilon(x - L)\,,$$

som er ekvivalent med

$$(1 + \varepsilon)x = B + \varepsilon L\,,$$

så det første skjæringspunktet med x-aksen er

$$\boxed{x_1 = x = \tfrac{B+\varepsilon L}{1+\varepsilon}\,.}$$

Deretter ser vi på likningen

$$(x - B) = +\varepsilon(x - L)\,,$$

som er ekvivalent med

$$(1 - \varepsilon)x = B - \varepsilon L\,,$$

som gir at det andre skjæringspunktet med x-aksen er

$$\boxed{x_2 = x = \tfrac{B-\varepsilon L}{1-\varepsilon}\,.}$$

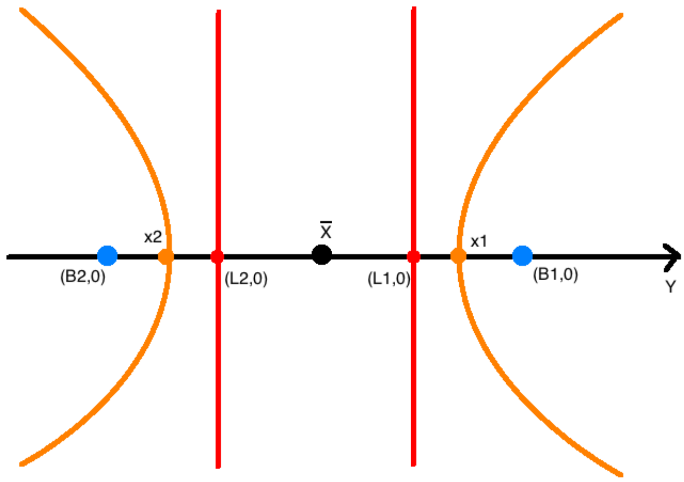
En enkel utregning viser at $x_1 > x_2$. Merk at dette er det motsatte av det som skjer når vi har en ellipse

Definisjoner	
Sentrum	$\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$
Hovedaksen	$a = \frac{x_1-x_2}{2}$
Biaksen	$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

Ved hjelp av disse definisjonene kan vi omskrive den generelle ligningen på følgende måte:

$$\boxed{\frac{(x-\bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,}$$

som vi kaller *hyperbelens standardligning.*



I motsatt fall,

$\frac{(x-\bar{x})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Eksentrisitet	$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$
Styrelinje	$L = \bar{x} + \frac{a}{\varepsilon}$
Brennpunkt	$B = \bar{x} + \varepsilon \cdot a$

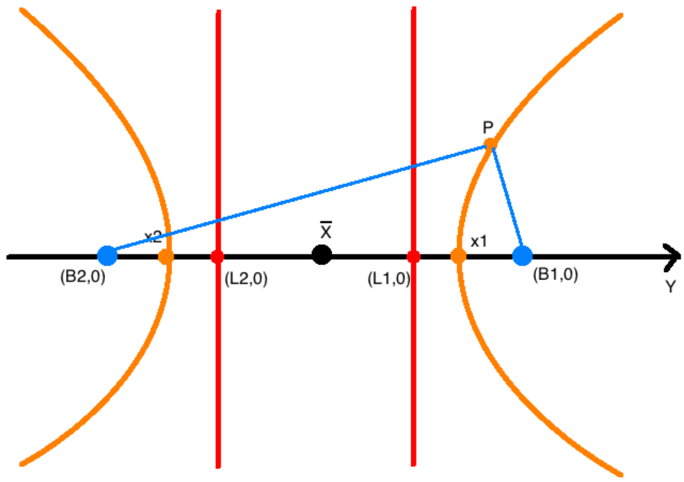
FRa hyperbelens standardlikning kan vi observere at hyperbelen er symmetrisk i forhold til den vertikale linjen $x = \bar{x}$. Dermed kan vi definere

$$B_2 = \bar{x} - \varepsilon \cdot a \qquad \text{and} \qquad \mathrm{L}_2 = \bar{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{a}}{\varepsilon}$$

. Vi har hatt trippelen gitt ved eksentrisitet ε, brennpunkt $\mathcal{B}_2 = (B_2, 0)$ og styrelinje ℓ_2 gitt ved $x = L_2$, bestemmer samme kjeglesnitt som $(\varepsilon, \mathcal{B}, \ell)$. Dermed sier vi at $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ og $\mathcal{B}_2$ er hyperbelens to brennpunkter.

Gitt de to brennpunktene $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ kan vi nå gi en alternativ geometrisk beskrivelse, på følgende måte: En hyperbel er det settet punkter som oppfyller atdifferansen mellom distansene fra et hvilket som helst punkt på hyperbelen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik $2a$, altså

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| - |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 2a \qquad \text{or} \qquad |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| - |\mathcal{P}\mathcal{B}_1| = 2\mathrm{a}\,.$$



2.3.1 Eksempler

1. Finn likningen for hyperbelen med eksentrisitet $\varepsilon = 2$, styrelinje $x = -1$ og brennpunkt $\mathcal{B} = (1, 0)$. Fra formlene har vi da

$$x_1 = \frac{1 + 2(-1)}{1 + 2} = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1 - 2(-1)}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

og hyperbelens sentrum er

$$\bar{x} = \frac{-1/3 - 3}{2} = -5/3\,,$$

og

$$a = \frac{-1/3 - (-3)}{2} = 4/3 \qquad b = 4/3 \cdot \sqrt{2^2 - 1} = 4/3 \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}\,.$$

Dermed blir likningen

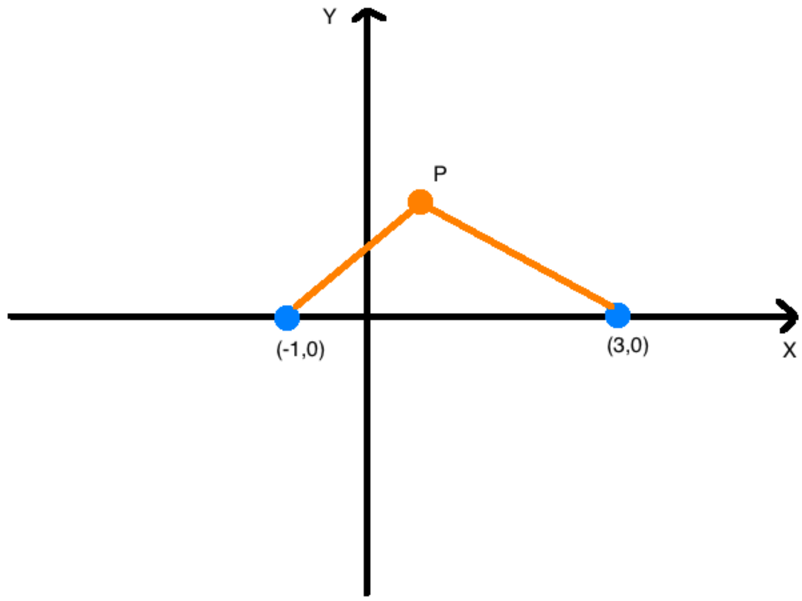
$$\frac{(x + 5/3)^2}{(4/3)^2} - \frac{y^2}{(\frac{4}{\sqrt{3}})^2} = 1\,,$$

så

$$\boxed{\tfrac{9(x+5/3)^2}{16} - \tfrac{3y^2}{16} = 1}$$

2. La $\mathcal{B}_1 = (-1, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (3, 0)$ være to punkter i planet. Vi vil finne likningen til hyperbelen hvor alle punkter $\mathcal{P}$ på hyperbelen tilfredsstiller

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| - |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 6 \qquad \text{or} \qquad |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| - |\mathcal{P}\mathcal{B}_1| = 6\,.$$



Først ser vi fra formlene at $2a = 6$, og dermed $a = 3$. Hyperbelens sentrum er midtpunktet mellom $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ som blir $\bar{x} = 1$. Vi vil nå regne ut eksentrisiteten, som ut fra formlene over er gitt ved sammenhengen

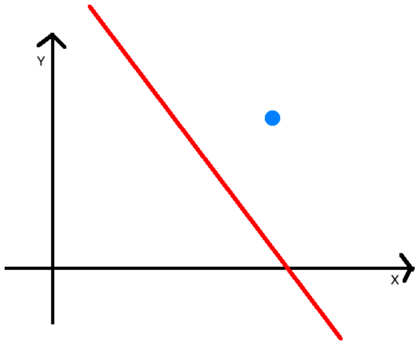
$$|\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2| = \frac{2a}{\varepsilon}\,,$$

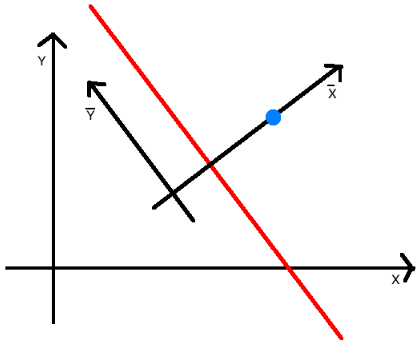
så vi har at $4 = \frac{2\cdot 3}{\varepsilon}$, og det følger at $\varepsilon = 3/2$. Til sist har vi at $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, så $b = 3\sqrt{5/4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. Dermed blir likningen for hyperbelen

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{4y^2}{45} = 1}$$

3 Koordinatbytte

Frem til nå har vi antatt at styrelinjen er parallel med y-aksen, m.a.o. $x = L$, og at brennpunktet ligger på x-aksen, m.a.o. $\mathcal{B} = (B, 0)$, Men hva skjer når vi bare har gitt en tilfeldig linje og et tilfeldig punkt? Koordinatbytte!



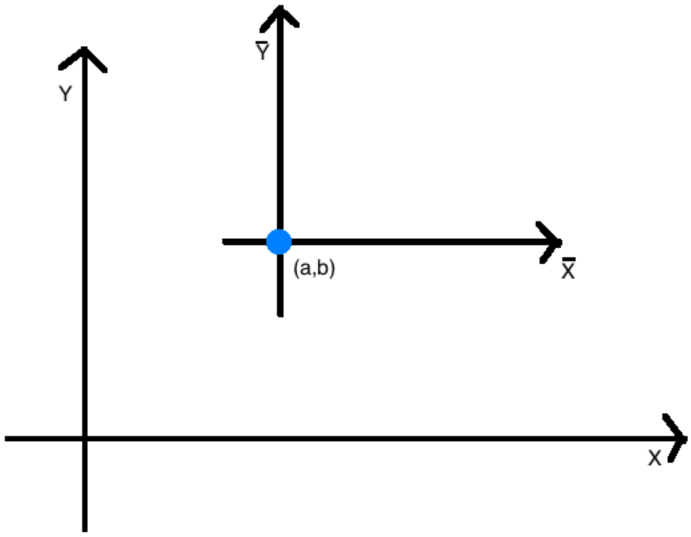


3.1 Translasjon

En *translasjon til et punkt* (a, b) er et bytte av koordinater (x, y) til nye koordinater $(\bar{x}, \bar{y})$ slik at

$$\bar{x} = x - a \qquad \text{and} \qquad \bar{\mathrm{y}} = \mathrm{y} - \mathrm{b}\,.$$

Grovt sett kan vi si at translasjonen flytter origo til punktet (a, b).



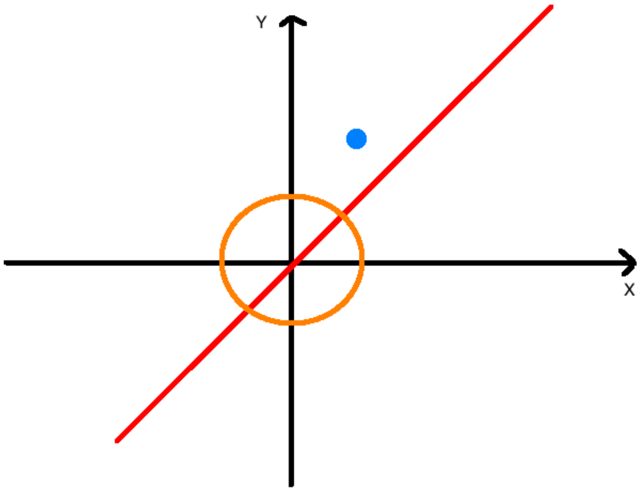
Vi kan reversere byttet av koordinater fra de nye koordinatene $(\bar{x}, \bar{y})$, til de gamle:

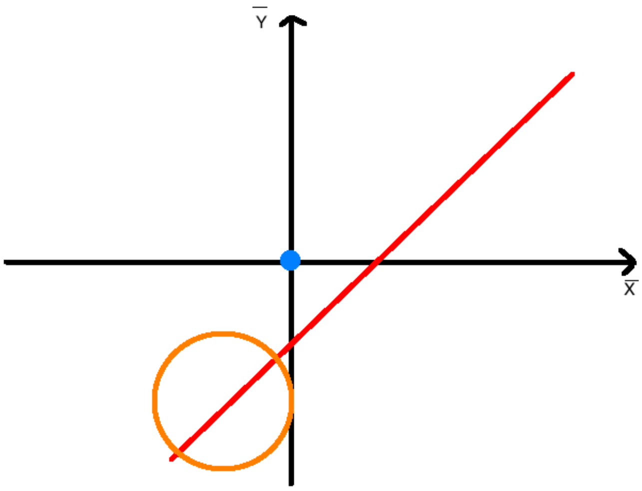
$$x = \bar{x} + a \qquad \text{and} \qquad \mathrm{y} = \bar{\mathrm{y}} + \mathrm{b}\,.$$

3.1.1 Eksempler

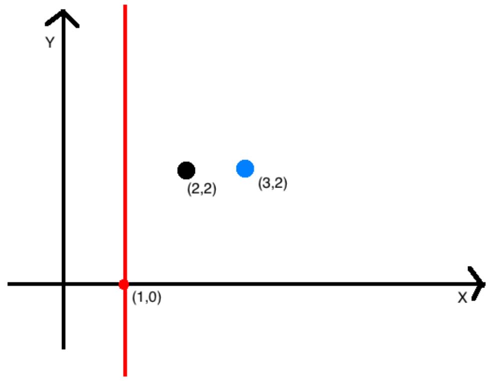
1. Vi ser på translasjonen til punktet $(1, 2)$. Da får vi:

(x, y)-koordinater	$(\bar{x}, \bar{y})$-koordinater
$(0, 0)$	$(-1, -2)$
$(1, 2)$	$(0, 0)$
$y = x$	$\bar{y} + 2 = \bar{x} + 1$ $\bar{y} = \bar{x} - 1$
$x^2 + y^2 = 1$	$(\bar{x} + 1)^2 + (\bar{y} + 2)^2 = 1$





2. Vi vil finne likningen for ellipsen med eksentrisitet $\varepsilon = 1/2$, styrelinje $x = 1$ og brennpunkt $(3, 2)$.



Merk at om vi heller gjør en translasjon til $(2,2)$ får vi følgende

(x,y)-koordinater	$(\bar{x},\bar{y})$-koordinater
$(3,2)$	$(1,0)$
$x = 1$	$\bar{x}+2 = 1$ $\bar{x} = -1$

Nå kan vi konstruere ellipsen med eksentrisitet $\varepsilon = 1/2$, styrelinje $\bar{x} = -1 = L$ og brennpunkt $(1,0)$, så $B = 1$. I følge formlene har vi at

$$x_1 = \frac{1 + 1/2 \cdot (-1)}{1 + 1/2} = \frac{1/2}{3/2} = 1/3$$

og

$$x_2 = \frac{1 - 1/2 \cdot (-1)}{1 - 1/2} = \frac{3/2}{1/2} = 3\,.$$

Dermed får vi

$$\bar{x} = \frac{1/3 + 3}{2} = \frac{10/3}{2} = 5/3$$
$$a = \frac{3 - 1/3}{2} = \frac{8/3}{2} = 4/3$$

og

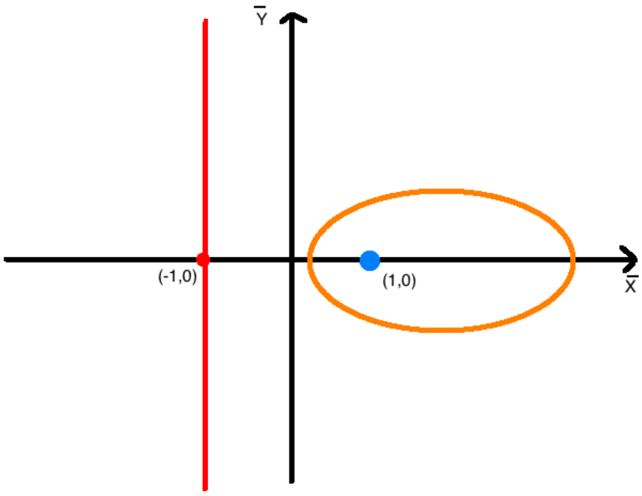
$$b = 4/3 \cdot \sqrt{1 - (1/2)^2} = 4/3 \cdot \sqrt{3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Dermed blir ligningen for ellipsen i $(\bar{x},\bar{y})$ koordinater

$$\frac{(\bar{x} - 5/3)^2}{(4/3)^2} + \frac{\bar{y}^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

som vi kan skrive om til

$$\frac{(\bar{x} - 5/3)^2}{16/9} + \frac{\bar{y}^2}{4/3} = 1\,.$$



Til slutt returnererer vi til de gamle koordinatene, (x, y), ved å bruke at

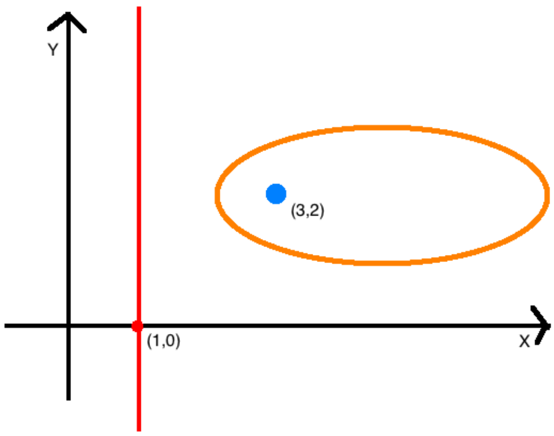
$$\bar{x} = x - 2 \qquad \text{and} \qquad \bar{\text{y}} = \text{y} - 2\,.$$

Så, ved å sette dett inn i likningen har vi at

$$\frac{((x-2)-5/3)^2}{16/9} + \frac{(y-2)^2}{4/3} = 1\,.$$

that is

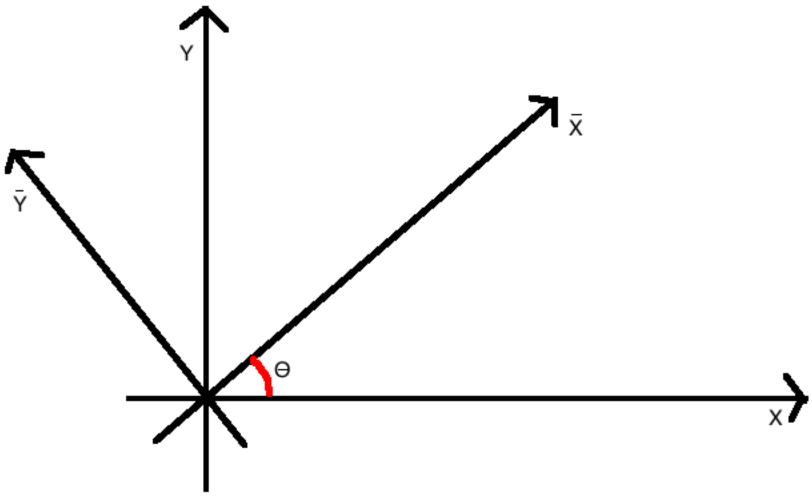
$$\boxed{\frac{(x-11/3)^2}{16/9} + \frac{(y-2)^2}{4/3} = 1\,.}$$



3.2 Rotasjon

En *rotasjon med vinkel* θ er et koordinatbytte fra (x, y) til nye koordinater $(\bar{x}, \bar{y})$ på en slik måte at

$$\bar{x} = x\cos\theta + y\sin\theta \qquad \text{and} \qquad \bar{\mathrm{y}} = -\mathrm{x}\sin\theta + \mathrm{y}\cos\theta\,.$$



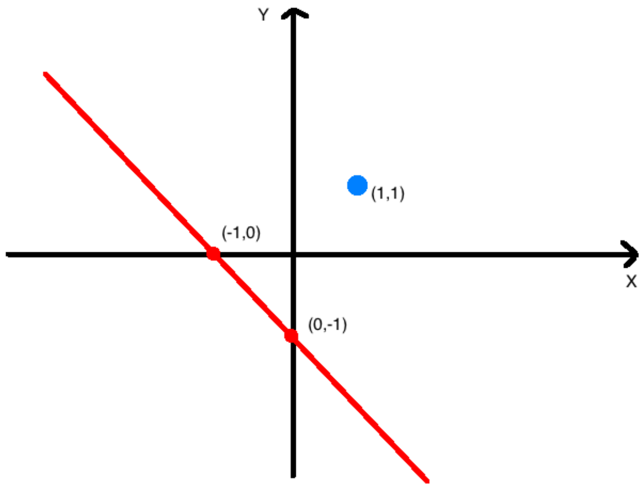
Vi kan reversere byttet av koordinater fra de nye koordinatene $(\bar{x}, \bar{y})$ til de gamle:

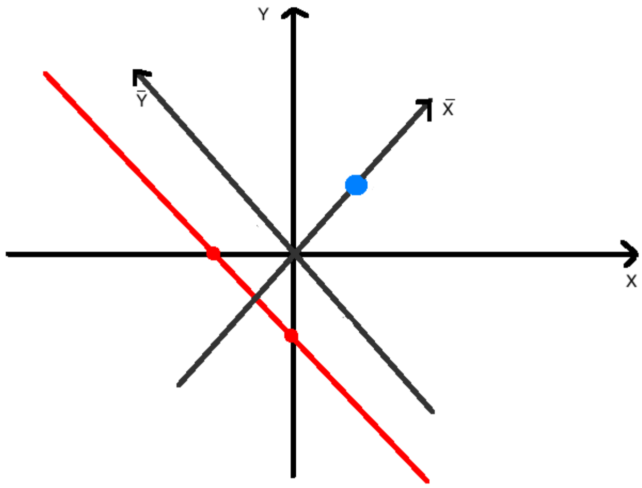
$$x = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta \qquad \text{og} \qquad \mathrm{y} = \bar{\mathrm{x}}\sin\theta + \bar{\mathrm{y}}\cos\theta\,.$$

3.2.1 Eksempler

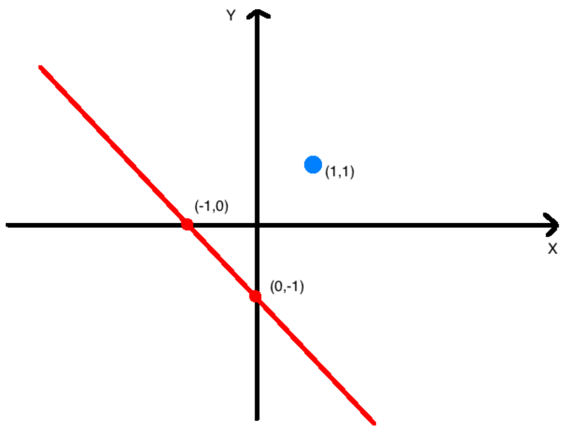
1. Vi ser på en rotasjon til 45°. Da har vi:

(x, y)-koordinater	$(\bar{x}, \bar{y})$-koordinater
$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(1, 1)$	$(\sqrt{2}, 0)$
$y = -x - 1$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}) = -(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}) - 1$ $\bar{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$





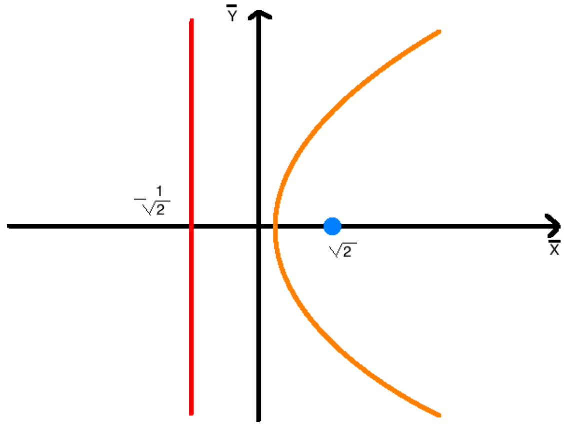
2. Vi vil finne likningen for parabelen med styrelinje $y = -x - 1$ og brennpunkt $(1, 1)$.



Merk at om vi gjør et koordinatskifte ved å rotere 45° til de nye koordiantene

$(\bar{x}, \bar{y})$, så får styrelinja ligningen $\bar{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ og brennpunktet blir $(\sqrt{2}, 0)$. Da kan vi skrive ligningen til parabelen

$$\bar{y}^2 = 2(\sqrt{2} - (-\frac{1}{\sqrt{2}}))\bar{x} + ((-\frac{1}{\sqrt{2}})^2) - (\sqrt{2})^2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{3}{2}$$



Til slutt skifter vi tilbake til de gamle koordinatene (x, y), og vi har

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)^2 = \frac{3}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y) - \frac{3}{2}$$

så vi har at

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}$$

og dermed blir likningen

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2xy - 3x - 3y + 3 = 0}$$