$\boxed{46}$ Kurve:

$$\mathbf{r}(t) = (t, \ln(\cos t)), \quad t \in [0, \pi/4].$$

a) Finn hastigheten $\mathbf{v}(t)$ og farten $v(t)$.
b) Finn buelengden. (Hint: $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$).

Løsning: a)
Vi har at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(\cos t) = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$, så

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (1, -\tan t)$$

og

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1^2 + \tan^2 t} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}.$$

Den siste likheten kommer av at $\cos t > 0$ på det oppgitte intervallet.

Løsning: b)
Vi bruker formelen for buelengde:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}. \end{aligned}$$

Dette integralet er enklest løst ved å slå opp i en formelsamling. Jeg ser ikke hvordan hintet er til hjelp fordi det viser seg at den korrekte substitusjonen er $u = \frac{1+\sin t}{\cos t}$:

$$\mathrm{d}u = \frac{\cos^2 t + (1 + \sin t)\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1 + \sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1, \qquad t = \pi/4 \quad \Rightarrow \quad u = 1 + \sqrt{2}.$$

Dette gir

$$\begin{aligned} L &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{\cos t}\frac{\cos^2 t}{1 + \sin t}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \Big|_1^{1+\sqrt{2}} \ln|u| \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88. \end{aligned}$$

(Det er blitt påpekt av studass P. Nyland at hintet er til hjelp om man bruker substitusjonen $u = \sin t$. Dette vil gi integranden $\frac{1}{1-u^2}$ som kan integreres vha. delbrøkoppspaltning.)

$\boxed{53}$ Et hjul med radius a ruller på utsiden av en sirkel med radius b. Finn en parametrisering av kurven tegnet av et gitt punkt på hjulet.

Løsning:
Vi legger koordinatsystemet slik at ligningen for sirkelen er $x^2 + y^2 = a^2$. Vi antar at hjulet starter med sentrum i $(b + a, 0)$ og vi velger å følge punktet $\mathcal{P}$ på hjulet som tangerer sirkelen i utgangsposisjonen. Vi antar så at hjulet ruller rundt sirkelen mot klokken og vi ønsker å parametrisere kurven med vinkelen t gitt av x-aksen og linjen ℓ mellom sentrum i sirkelen og sentrum i hjulet.

La $\mathcal{T}$ være tangeringspunktet mellom sirklene og la θ være vinkelen mellom ℓ og linjen gitt av sentrum i hjulet og $\mathcal{P}$. Vektoren fra sentrum i sirkelen til sentrum i hjulet er

$$\mathbf{r}_1(t) := \begin{pmatrix} (a+b)\cos t \\ (a+b)\sin t \end{pmatrix}$$

og en skisse vil vise at vektoren fra sentrum i hjulet til $\mathcal{P}$ er

$$\mathbf{r}_2(t) := \begin{pmatrix} b\cos(t+\pi+\theta) \\ b\sin(t+\pi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\cos(t+\theta) \\ -b\sin(t+\theta) \end{pmatrix}.$$

Ettersom hjulet ruller på sirkelen, vil buelengden fra $(a, 0)$ til $\mathcal{T}$ være den samme som buelengden fra $\mathcal{T}$ til $\mathcal{P}$. Dvs

$$at = b\theta.$$

Vi bruker nå at $\theta = \frac{a}{b}t$ og får at parametriseringen av kurven er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \\ (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \end{pmatrix}.$$

Se forøvrig "Epicycloid" på Wikipedia.

$\boxed{1.11{:}1}$ Finn $T_4 f$ om 0 når $f(x) = e^{x^2}$.
(Merknad: $e^{x^2} = e^{(x^2)}$, ikke $(e^x)^2$).

Løsning:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x^2} & f(0) &= 1, \\
f'(x) &= 2xe^{x^2} & f'(0) &= 0, \\
f''(x) &= (2+4x^2)e^{x^2} & f''(0) &= 2, \\
f'''(x) &= (12x+8x^3)e^{x^2} & f'''(0) &= 0, \\
f^{(iv)}(x) &= (12+48x^2+16x^4)e^{x^2} & f^{(iv)}(0) &= 12.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
T_4 f(x) &= \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \\
&= 1 + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{12}{4!} x^4 \\
&= 1 + x^2 + \frac{1}{2} x^4.
\end{aligned}
$$

$\boxed{1.11{:}2}$ Finn $T_3 f$ om 1 når $f(x) = \sqrt{x}$.

Løsning:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} & f(1) &= 1, \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & f'(1) &= 1/2, \\
f''(x) &= -\frac{1}{4} x^{-3/2} & f''(1) &= -1/4, \\
f'''(x) &= \frac{3}{8} x^{-5/2} & f'''(1) &= 3/8.
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
T_3 f &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3.
\end{aligned}
$$

$\boxed{1.11{:}10}$ Finn $T_3 f$ om 1 når $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$.

Løsning:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 3x^2 + 2x - 7 & f(1) &= -7, \\
f'(x) &= 4x^3 - 6x + 2 & f'(1) &= 0, \\
f''(x) &= 12x^2 - 6 & f''(1) &= 6, \\
f'''(x) &= 24x & f'''(1) &= 24.
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
T_3 f &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 \\
&= -7 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3.
\end{aligned}
$$