Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1102 Grunnkurs i analyse II
Vår 2014

Løsningsforslag — Øving 6

12.2.5g Ser på forholdet $|a_{n+1}/a_n|$ som er

$$\frac{(n+1)!4^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!4^n}=\frac{4(n+1)n!n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\frac{4(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)}=4\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=4\frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{1}{n+1})},$$

siden $\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. Dette går mot $4e^{-1}>1$ fra definisjonen av e^x, og dermed divergerer rekken.

12.2.7f Omformer uttrykket:

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}.$$

Siden vi vet at $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}$ fra utregningene i forrige oppgave, så vil vi bruke grensesammenlikning med $1/(n+1)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}>0,$$

så rekken divergerer.

12.2.8a Her ser vi at rekken går omtrent som $1/n$ og bruker derfor grensesammenlikningstesten med $1/n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n+1}{5n^3+7}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{4+3/n+1/n^2}{5+7/n^3}=4/5>0,$$

hvor vi har delt på n^3 i alle ledd. Siden grensen er større enn 0 kan vi konkludere med at rekken divergerer.

12.2.8e Ved å se på Taylorpolynomet til $\ln(1+x)$ om 0, så ser vi at $\ln(1+x)$ vil gå omtrent som x for små x, og dermed kan vi anta at $\ln(1+\frac{1}{n^2})$ vil gå som $1/n^2$ for store n. Bruker grensesammenlikningstest med $1/n^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+1/n^2}\frac{-2}{n^3}}{-2/n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n^2}=1<\infty,$$

ved L'Hopital i første likhet, så rekken konvergerer.

12.3.1 **c)** Vi vet at $\sqrt{n}$ er en voksende funksjon som går mot uendelig. Da vil $1/\sqrt{n}$ være en synkende funksjon som går mot null. Dermed konvergerer rekken ved testen for alternerende rekker.

e) Ser at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos(1/n)} = 1$, så leddene i rekken vil ikke gå mot null, og dermed divergerer rekken ved divergenstesten.

h) Begynner med å se at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergerer, og at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerer ved det vi gjorde i oppgave c. Siden leddene i rekken i oppgaven er summen av leddene i disse to rekkene, så divergerer rekken ved Korollar 12.1.8.

$\boxed{\text{12.3.2c}}$ Vi har at

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-1/n)^n.$$

Ved definisjonen av e^x, så er $\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = e^{-1}$. Dermed går heller ikke leddene i rekken mot 0, og rekken divergerer ved divergenstesten.

$\boxed{\text{12.3.3b}}$ Bruker feilestimatet for alternerende rekker:

$$|s-s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0.25.$$

Dette skjer når $n > 15$, så vi tar med 16 ledd, og får -0.4818.

$\boxed{\text{12.3.4}}$ I hele denne oppgaven skal vi anta at $|x| < 1$.

a) Vi skal vise at

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdot$$

Vi bruker setning 12.1.1 (side 625), og får

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

b) Vi skal forklare hvorfor

$$\left|\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right| \leq x^{n+1}$$

for $x \geq 0$.

Rekken

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k$$

er alternerende, og den oppfyller kriteriene i testen for alternerende rekker. Da sier testen for alternerende rekker at avstanden mellom summen av hele rekken og summen av de n første leddene er mindre enn eller lik absoluttverdien av ledd nummer $n+1$, altså

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k - \sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right| \leq \left|(-x)^{n+1}\right|$$

Men vi vet fra (a) at

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \frac{1}{x+1},$$

og siden $x \geq 0$, har vi

$$\left|(-x)^{n+1}\right| = x^{n+1}.$$

Dermed får vi

$$\left|\frac{1}{x+1} - \sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right| \leq x^{n+1}.$$

c) Vi skal vise at

$$\left|\ln(1+x) + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

for $x \geq 0$.
Vi definerer en funksjonsfølge (f_n) ved

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k,$$

og lar funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Da vet vi fra (a) at funksjonsfølgen (f_n) konvergerer punktvis mot f. Vi vil nå vise at funksjonsfølgen konvergerer uniformt på ethvert intervall $[0, b]$ der $0 < b < 1$. For en gitt n og en $x \in [0, b]$ har vi ved å bruke resultatet fra (b) at

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right| \leq x^{n+1} \leq b^{n+1}.$$

Dette kan vi bruke til å finne en øvre grense for avstanden mellom f og f_n på intervallet $[0, b]$:

$$d_{[0,b]}(f, f_n) = \sup\{\, |f(x) - f_n(x)| \mid x \in [0, b] \,\} \leq b^{n+1}.$$

Dermed får vi

$$\lim_{n\to\infty} d_{[0,b]}(f, f_n) \leq \lim_{n\to\infty} b^{n+1} = 0,$$

som betyr at

$$\lim_{n\to\infty} d_{[0,b]}(f, f_n) = 0.$$

Dette vil si at funksjonsfølgen (f_n) konvergerer uniformt mot funksjonen f på intervallet $[0, b]$.
La oss nå gå løs på selve oppgaven. Vi får gitt en x som ligger i intervallet $[0, 1)$, og skal vise at

$$\left|\ln(1+x) + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

Vi kan velge en b som ligger mellom x og 1. Da ligger x i intervallet $[0, b]$, og ved det vi viste over, har vi at funksjonsfølgen (f_n) konvergerer uniformt mot f på dette intervallet. Dermed kan vi bruke setning 11.4.1 (side 606) og få

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\ dt = \int_0^x f(t)\ dt. \tag{1}$$

Vi regner ut uttrykkene på venstre og høyre side av denne likningen. For venstresiden får vi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\ dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^x \sum_{k=0}^{n}(-t)^k\ dt = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

og for høyresiden får vi

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^x = \ln(1+x).$$

Ved å sette inn i likning (1) får vi da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = -\ln(1+x). \tag{2}$$

Rekken på venstre side i denne likningen er en alternerende rekke der leddenes absoluttverdier avtar og går mot 0. Ved testen for alternerende rekker (12.3.1, side 644) får vi dermed at

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right| \le \left|\frac{(-x)^{n+2}}{n+2}\right|$$

Når vi setter inn summen av rekken fra likning (2) og rydder litt, får vi

$$\left|\ln(1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\right| \le \frac{x^{n+2}}{n+2},$$

som var det vi skulle vise.

d) Vi skal finne en tilnærmet verdi til $\ln\frac{3}{2}$ med nøyaktighet bedre enn 0.01.
Siden

$$\ln\frac{3}{2} = \ln\Big(1+\frac{1}{2}\Big),$$

kan vi bruke resultatet fra (c) med $x = 1/2$. For å få en god nok tilnærming, vil vi velge n slik at

$$\frac{(1/2)^{n+2}}{n+2} < 0.01.$$

Vi ser at det er tilstrekkelig å velge $n = 3$. Da får vi

$$\ln\frac{3}{2} \approx -\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1/2)^{k+1}}{k+1} = \frac{1/2}{1} - \frac{1/4}{2} + \frac{1/8}{3} - \frac{1/16}{4} \approx 0.401.$$

12.4.1

c) Vi skal avgjøre om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\frac{1}{n}$$

er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent.
Denne rekken er en alternerende rekke der leddenes absoluttverdier avtar og går mot 0, så den er konvergent ved testen for alternerende rekker (12.3.1, side 644).
Vi kan imidlertid vise at den ikke er absolutt konvergent. Vi bruker grensesammenligningstesten (12.2.8, side 636), og sammenligner rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n}$$

med den kjente divergente rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(se setning 12.2.4, side 633). Vi regner ut grenseverdien i grensesammenligningstesten ved å bruke l'Hôpitals regel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin\frac{1}{n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-1/n^2}}}{-n^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-1/n^2}} = 1 > 0.$$

Dermed sier grensesammenligningstesten at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$$

også er divergent.

Dette betyr at rekken i oppgaven er betinget konvergent.

g) Vi skal avgjøre om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent.

Her bruker vi forholdstesten. $|a_{n+1}/a_n|$ blir

$$\frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^{2n}(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n^{2n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Man har at $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = 1/4$. Grensen til den andre faktoren finnes ved å se på ln til uttrykket:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{1/n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n+1}(-1/n^2)}{-1/n^2} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2,$$

ved L'Hopitals regel. Dermed har vi at

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = e^2 \frac{1}{4} > 1,$$

og dermed divergerer rekken.

12.4.2 **d)** Vi skal finne ut om rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent.

Vi bruker forholdstesten (12.4.5, side 648). Vi har

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}}{(-2)^n \cdot \frac{n!}{(2n)!}} \right| &= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!/(2n+2)!}{n!/(2n)!} \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1.
\end{aligned}$$

Dermed sier forholdstesten at rekken er absolutt konvergent.