NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamen i **MA1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen Harald Hanche-Olsen

Tlf 922 48 767

Eksamensdato 16. august 2014

Eksamenstid (fra–til) 9:00 – 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon
Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk Bokmål

Antall sider 2

Antall sider vedlegg 2

Kontrollert av

Dato Sign

Oppgave 1

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + y' = 0.$$

b) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + y' = e^{-x}.$$

Finn spesielt den løsningen som tilfredsstiller $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Oppgave 2 Bestem brennpunkt og styrelinje for parabelen

$$y^2 = 2x + 1.$$

Lag en skisse av kurven med brennpunkt og styrelinje inntegnet.

Oppgave 3

a) Avgjør om følgende rekker konvergerer eller divergerer. Begrunn svarene.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

b) Vis at begge rekkene

$$i) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) \qquad (ii) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

har følgende egenskaper: De er alternerende og og leddene går mot 0.
For hver av rekkene, avgjør om den er konvergent eller divergent. Begrunn svarene.

Oppgave 4 Uttrykk funksjonen $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$ som en potensrekke, og beregn $f(1)$ med en feil mindre enn 10^{-4}.

Oppgave 5

a) Bruk Simpsons metode med 4 delintervall på integralet $\int_{t=0}^{1} \frac{1}{1+t} dt$ til å finne en tilnærmet verdi for $\ln 2$, og gjør et overslag over feilen.

b) Med utgangspunkt i summeformelen for en geometrisk rekke, utled relasjonen

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad |x| < 1,$$

og bruk dette til å vise at

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}. \tag{*}$$

[*Hint:* $\ln 2 = -\ln \frac{1}{2}$]

c) Vis at feilen som gjøres ved å bryte av rekken (*) etter N ledd er mindre enn $\frac{1}{N+1} 2^{-N}$. Med utgangspunkt i dette feilestimatet, hvor mange ledd må du ha med i rekken (*) for å få like god nøyaktighet som i punkt **a)**?

Formelark

Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Taylors formel med restledd

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n f(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \\ &= T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

der c er et tall i det åpne intervallet mellom a og x.

Generalisert binomialkoeffisient (r: et reelt tall, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Trapesmetoden Hvis f har kontinuerlig andrederivert på $[a,b]$ og $|f''(x)| \le K$ der, så har vi:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{K(b-a)}{12}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

der n er antall delintervall og h er lengden på disse.

Simpsons metode Hvis f har kontinuerlig fjerdederivert på $[a,b]$ og $|f^{(4)}(x)| \le K$ der, så har vi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \le \frac{K(b-a)}{180}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

der n er antall delintervall (må være et partall) og h er lengden på disse.

(forts. neste side)

Numerisk løsning av initialverdiproblemet $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$.

- **Eulers metode** $x_n = x_0 + nh \qquad y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.$
- **Eulers midtpunktmetode** $x_n = x_0 + nh \quad y_n = y_{n-1} + f(x'_{n-1}, y'_{n-1})h$ der $(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + h/2, y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h/2)$.

Kjeglesnitt Ligning for kjeglesnitt med eksentrisitet $\epsilon \neq 1$ (dvs. ellipse eller hyperbel), styrelinje $x = L$ og brennpunkt i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\epsilon^2 - 1)\left((x - \overline{x})^2 - a^2\right),$$

der $\overline{x} = \frac{B - \epsilon^2 L}{1 - \epsilon^2}$ = sentrum i kjeglesnittet og $a^2 = \left(\frac{\epsilon(B-L)}{1-\epsilon^2}\right)^2$.
For $\epsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2.$$