Frobenius' metode

2012-03-19

Annen ordens homogen lineær differensialligning ...

... med variable koeffisienter:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0.$$

Et punkt x_0 kalles et ordinært punkt for ligningen dersom p og q er analytiske i x_0.

Om 0 er et slikt punkt prøver vi

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1} x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2} x^n$$

Regulært singulært punkt

Et singulært punkt er et punkt som ikke er ordinært for ligningen. Det kalles regulært singulært om ligningen kan skrives om til formen

$$x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0.$$

Om 0 er et slikt punkt kan vi prøve

$$y(x) = x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\mu}$$

$$x y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\mu) a_n x^{n+\mu}$$

$$x^2 y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+\mu)(n+\mu-1) a_n x^{n+\mu}$$

med $a_0 \neq 0$.