Uniform konvergens, Taylorrekker

2012-02-27

Punktvis og uniform konvergens

Vi sier at $f_n(x) \to f(x)$ punktvis for $x \in [a,b]$ dersom det for hver $x \in [a,b]$ og $\varepsilon > 0$ finnes N slik at

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Vi sier at $f_n(x) \to f(x)$ uniformt for $x \in [a,b]$ dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes N slik at

$$x \in [a,b] \text{ og } n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Hvis hver f_n er kontinuerlig på $[a,b]$ og $f_n(x) \to f(x)$ uniformt, så er f kontinuerlig, og

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{når } n \to \infty.$$

Uniform konvergens av potensrekker

Anta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < R$$

der $R > 0$. La $0 < r < R$. Da konvergerer rekken uniformt for $|x| \le r$.

... og derfor kan den integreres leddvis.

... og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ har samme konvergensradius som originalen.

... og derivasjon er det omvendte av integrasjon, så det går også greit!

Summen av en konvergent potensrekke (I)

Anta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < R$$

der $R > 0$. Da gjelder

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

slik at vi også kan skrive

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad |x| < R.$$

Summen av en konvergent potensrekke (II)

Anta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \qquad |x-c| < R$$

der $R > 0$. Da gjelder

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

slik at vi også kan skrive

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \qquad |x-c| < R.$$

Om dette er tilfelle, kalles f *analytisk* i punktet c.

Et ikke helt opplagt faktum:

Under betingelsene over er f analytisk i hver x med $|x-c| < R$.

Taylorrekke

Taylorrekken til en funksjon f, sentrert i punktet $x = c$ er rekken gitt ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

(N-te delsum er Taylorpolynomet til f av grad N.)

Viktige Maclaurinrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\operatorname{atan} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$