Absolutt og betinget konvergens

2012-02-16

Absolutt konvergens

Definisjon: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kalles absolutt konvergent dersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Teorem: En absolutt konvergent rekke er konvergent.

Definisjon: En rekke som er konvergent, men ikke absolutt konvergent, kalles betinget konvergent.

Alternerende rekketest

Anta

$$\left.\begin{aligned} a_n a_{n+1} &< 0 \\ |a_{n+1}| &\le |a_n| \end{aligned}\right\} \text{før eller senere}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Permuterte rekker

En permutasjon av de naturlige tallene $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ er en inverterbar funksjon $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (det vil si den har en omvendt funksjon $\sigma^{-1}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

Nedenfor er σ en slik permutasjon.

Teorem: Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolutt konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Men dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er betinget konvergent, så kan σ velges slik at $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergerer mot en hvilken som helst grense, eller divergerer mot $\pm\infty$, eller divergerer uten å ha en grense.