Konvergenstester for positive rekker

2012-02-13

Viktig melding

Forelesningen førstkommende torsdag
flyttes til **R1**

Nyttig å huske om monotone følger

Enhver monoton følge har en grense.

Hvis følgen er begrenset, er den konvergent, og grensen er et reelt tall.

Hvis ikke, er følgen divergent, og grensen er enten $+\infty$ eller $-\infty$.

Grunnen til at det er slik: *Kompletthetsaksiomet for de reelle tall.*

Neste: Konsekvensen av dette for *rekker*.

Konvergens for positive rekker

Enhver positiv rekke har en sum.

Hvis følgen av delsummer er begrenset, er rekken konvergent, og summen er et reelt tall.

Hvis ikke, er rekken divergent, og summen er $+\infty$.

Når $a_n \geq 0$ (før eller siden) gjelder derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er konvergent} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

Integraltesten

Anta f er positiv og ikkevoksende på $[N, \infty)$ for et naturlig tall N, og at $a_n = f(n)$ for alle $n \geq N$. Da gjelder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \int_N^{\infty} f(x)\, dx < \infty.$$

Enkel sammenligning

Grunnidé: Dersom $0 \le a_n \le b_n$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Anta at $0 \le a_n \le K b_n$ for alle store nok n (dvs før eller siden) der K er en konstant. Da gjelder

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

Grensesammenligning

Anta $a_n \geq 0,\ b_n > 0$ og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, +\infty].$$

Da gjelder

$$L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

$$L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

Forholdstesten

Anta at $a_n > 0$ (før eller senere) og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \in [0, +\infty].$$

Da gjelder

$$0 \le \rho < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

$$1 < \rho \le \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

Hvis $\rho = 1$, gir ikke testen noen informasjon.

Rottesten

Anta at $a_n \geq 0$ (før eller senere) og at

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \sigma \in [0, +\infty].$$

Da gjelder

$$0 \leq \sigma < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

$$1 < \sigma \leq \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

Hvis $\sigma = 1$, gir ikke testen noen informasjon.