Eksponentialfunksjoner og logaritmer

uten tull – og uten tårer

2012-02-02

Hva er egentlig problemet?

Utgangspunktet er definisjonen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ganger}}.$$

Med litt strev utvider man definisjonen til eksponenter som er null, eller negative heltall, eller mer generelt, rasjonale tall (så lenge $a > 0$).

Men hva skal $\pi^{\sqrt{\pi}}$ bety?

Krav til eksponentialfunksjoner

Vi vil gjerne holde fast på identiteten

$$a^{u+v} = a^u a^v.$$

I tillegg vil vi gjerne at a^u skal være en kontinuerlig funksjon av u.

Vi gir en formell definisjon:

En **eksponentialfunksjon** er en kontinuerlig funksjon g definert på hele tallinjen som er slik at

$$g(0) = 1, \quad g(u+v) = g(u)g(v) \qquad \text{for alle } u, v \in \mathbb{R}.$$

Vi kaller $a = g(1)$ for *grunntallet* til eksponentialfunksjonen g.

Det viser seg at det ikke kan finnes mer enn én slik for et gitt grunntall a.

Fra eksponentialfunksjon til logaritme

Hvis en eksponentialfunksjon g attpåtil er deriverbar, så oppfyller den en differensialligning på formen

$$g'(u) = Ag(u)$$

for en konstant A.

Hvis $A = 0$ så blir $g(u) = 1$ for alle u. Vi ser bort fra dette (kjedelige, trivielle) spesialtilfellet.

Videre må g ha en omvendt funksjon f, som viser seg å oppfylle

$$f'(x) = \frac{1}{Ax}$$

og dermed er det jo bare å integrere høyresiden for å finne f.

Den naturlige logaritmen og eksponentialfunksjonen

Vi ender med å lage oss funksjonen

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

og kaller dette den naturlige logaritmen.

Den naturlige logaritmen viser seg å bli en funksjon som avbilder $\mathbb{R}_+$ på $\mathbb{R}$, og ikke minst har den nøkkelegenskapen

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Vi definerer eksponentialfunksjonen som den omvendte funksjonen:

$$x = \exp u \iff u = \ln x$$

Generelle potenser

Vi ender med (blir praktisk talt tvunget til) definisjonene

$$a^u = \exp(u \ln a) \qquad \text{for } a > 0 \text{ og } u \in \mathbb{R}$$

og

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$