Konvergens for fikspunktiterasjon og Newtons metode

Kort repetisjon av noen hovedpoenger

2012-02-02

Konvergens for fikspunktiterasjon

(1) Dersom f er kontinuerlig i $[a,b]$ og deriverbar i (a,b) med $|f'(x)| \le K$ for alle $x \in [a,b]$, så gjelder [sekantsetningen!]

$$|f(u) - f(v)| \le K|u - v| \qquad \text{for alle } u, v \in [a,b]. \qquad (*)$$

(2) Dersom $a \le f(x) \le b$ for alle $x \in [a,b]$ og $(*)$ holder med $K < 1$, så finnes presis ett punkt $r \in [a,b]$ med $f(r) = r$.

(2) Dette punktet kan finnes ved fikspunktiterasjon:

$$\text{Velg } x_0 \in [a,b], \quad x_{n+1} = f(x_n) \text{ for } n = 0,\ 1,\ \ldots$$

Da blir $|x_n - r| \le K^n |x_0 - r|$, og dermed vil $x_n \to r$.

Kvadratisk konvergens i et spesialtilfelle

Dersom f har et fikspunkt r, det vil si $f(r) = r$ og i tillegg $f'(r) = 0$, mens $f''(x)$ eksisterer og er begrenset i nærheten av r, får vi mye raskere konvergens for fikspunktiterasjonen: Nå gir Taylors formel

$$x_{n+1} - r = f(x_n) - f(r) = \tfrac{1}{2} f''(s_n) \cdot (x_n - r)^2$$

for en passende s_n mellom x_n og r, så dersom $|f''(x)| \le 2M$ for en passende konstant M, får vi $|x_{n+1} - r| \le M|x_n - r|^2$. Ved induksjon gir dette

$$M \cdot |x_n - r| \le (M \cdot |x_0 - r|)^{2^n},$$

som går meget fort mot null om vi bare har valgt $|x_0 - r|$ liten nok, slik at $M|x_0 - r| < 1$. Dette kalles kvadratisk konvergens.
Antall gyldige siffer i x_n dobles (grovt regnet) for hver iterasjon.

Konvergens for Newtons metode

Dersom f er tre ganger deriverbar og f''' er begrenset i nærheten av r der $f(r) = 0$ og $f'(r) \neq 0$, så vil tallene i Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

konvergere mot r dersom startpunktet x_0 er valgt tilstrekkelig nær x_0.

Faktisk får vi kvadratisk konvergens, for Newtons metode er en fikspunkt-iterasjon anvendt på funksjonen

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

som oppfyller $g(r) = r$, $g'(r) = 0$, og g'' er begrenset i nærheten av r.