# Linear og kvadratisk tilnærming, Taylorpolynom

2012-01-23/2012-01-26

# Liten $o$, stor $O$

Liten $o$: Vi skriver

$$f(x) = o(u(x)) \quad \text{når } x \to a$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| \le \epsilon |u(x)|$$

Stor $O$: Vi skriver

$$f(x) = O(u(x)) \quad \text{når } x \to a$$

dersom det finnes en konstant $K$ og en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| \le K |u(x)|$$

Vi kan gi tilsvarende definisjoner for $o$ og $O$ når $x \to \pm\infty$:
Erstatt $\delta > 0$ med $M$ og $0 < |x - a| < \delta$ med
$x > M$ (for tilfellet $x \to +\infty$) eller $x < M$ (for tilfellet $x \to -\infty$).

# Noen eksempler på bruk av O-notasjon

Dersom $a > 0$ er en konstant, gjelder

$$\ln x = o(x^a) \qquad \text{når } x \to \infty.$$

Harmonisk sum og Eulers konstant $\gamma$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\Big(\frac{1}{n^6}\Big) \qquad \text{når } n \to \infty.$$

Stirlings formel:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right) \qquad \text{når } n \to \infty.$$

# Deriverbarhet, liten $o$, lineær tilnærming

Å si at $f$ er deriverbar i $a$ er det samme som å si

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}_{L(x)} + o(x-a) \quad \text{når } x \to a.$$

Uttrykket

$$L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

kalles den lineære tilnærmingen til $f$ omkring $x = a$.

# Den generaliserte sekantsetningen

Anta at $f$ og $g$ er kontinuerlige funksjoner på $[a,b]$,
begge deriverbare i $(a,b)$,
$g(a) \neq g(b)$,
og at det ikke finnes noen $t \in (a,b)$ der $f'(t) = g'(t) = 0$.

Da finnes en $s \in (a,b)$ med

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}.$$

# Feilestimat for lineær tilnærming

Anta at $f$ er en kontinuerlig funksjon på $[a, x]$,
to ganger deriverbar i $(a, x)$ og deriverbar i $a$, med $f'$ kontinuerlig i $a$.

Da finnes en $s \in (a, x)$ med

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \tfrac{1}{2} f''(s) \cdot (x - a)^2.$$

Tilsvarende gjelder om $f$ er kontinuerlig på $[x, a]$,
to ganger deriverbar i $(x, a)$ og deriverbar i $a$, med $f'$ kontinuerlig i $a$.

Da finnes en $s \in (x, a)$ slik at samme formel holder.

# Feilestimat for kvadratisk tilnærming

Anta at $f$ er en kontinuerlig funksjon på $[a, x]$,
tre ganger deriverbar i $(a, x)$ og to ganger deriverbar i $a$,
med $f''$ kontinuerlig i $a$.

Da finnes en $s \in (a, x)$ med

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \tfrac{1}{2} f''(a) \cdot (x - a)^2 + \tfrac{1}{6} f'''(s) \cdot (x - a)^3.$$

Tilsvarende gjelder om $f$ er kontinuerlig på $[x, a]$,
tre ganger deriverbar i $(x, a)$ og to ganger deriverbar i $a$,
med $f''$ kontinuerlig i $a$.

Da finnes en $s \in (x, a)$ slik at samme formel holder.

# Taylorpolynom

Taylorpolynomet til en funksjon $f$, av grad $n$ basert på punktet $x = a$ er det entydig gitte $n$-tegradspolynomet $P_n(x)$ som er slik at

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad P_n''(a) = f''(a), \quad \ldots, \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Det er gitt ved

$$P_n(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

eller kortere uttrykt:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

# Taylors formel med Lagranges restledd

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}^{P_n(x)}$$
$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{E_n(x)}$$

der $s$ ligger mellom $a$ og $x$.

Kortere variant:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

# Taylors formel med restledd (alternativ)

Mest en kuriositet, eller en utfordring for spesielt interesserte:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(t-a)^n\,dt$$

Kan vises ved induksjon – start med $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ og bruk delvis integrasjon.

Mer presist, la $u = f'(t)$, $v = t-a$, og skriv integralet som $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ første gangen du integrerer delvis.

# Taylors formel med stor $O$-notasjon

Anta at $f$ er $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar i nærheten av $x = a$:
Da er

$$f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1}) \qquad \text{når } x \to a,$$

der $P_n(x)$ er Taylorpolynomet av grad $n$ til $f$ i $a$.

Det er nyttig å vite at Taylorpolynomet er det eneste polynomet av grad $\leq n$ som har denne egenskapen!