MA1102 Grunnkurs i analyse II

2012-01-12

Parametriske kurver i planet

Parametrisk kurve: Gitt ved to funksjoner på et intervall.
Skrives gjerne på formen

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right\} \qquad t \in I$$

der I er et intervall (som består av mer enn ett punkt) og f og g er kontinuerlige funksjoner på I.

Kurven kalles glatt dersom f og g begge er kontinuerlig deriverbare* og det ikke finnes noen $t \in I$ der $f'(t) = g'(t) = 0$.

* En funksjon er kontinuerlig deriverbar dersom den er deriverbar og den deriverte er kontinuerlig.

Kurver i planet

Om vi har gitt en parametrisk kurve

$$\left\{ \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned} \right\} \qquad t \in I$$

så vil vi gjerne kalle punktmengden $\{(f(t), g(t)) : t \in I\}$ en kurve.
Denne punktmengden kalles bildet til den parametriske kurven.

Problem: $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ er en kurve (takket være Peano)!

Vi kan unngå slike absurditeter ved å fokusere på enkle kurver, det vil si parametriske kurver som aldri besøker samme punkt to ganger.

(Med mulig unntak av start- og endepunkt – en kurve som vender tilbake til utgangspunktet kalles lukket.)

Kurver som bare skjærer seg selv et endelig antall ganger gir oss heller ikke store problemer i praksis.

Glatte kurver i planet

Bildet av en glatt parametrisk kurve kalles selv en glatt kurve.

En parametrisk kurve som ikke er glatt kan godt ha et glatt bilde!
Eksempel: $x = t^3$, $y = t^6$ for $t \in [-1, 1]$.

Beviset for **Theorem 1** i avsnitt 8.3 går ut på at
glatte kurver er satt sammen av funksjonsgrafer
på formen $y = G(x)$ eller $x = F(y)$.