Ordinære differensialligninger – eksistens og entydighet

Harald Hanche-Olsen

2012-04-09

1 Introduksjon

Notatet handler om *ordinære første ordens differensialligninger*, det vil si differensialligninger på formen

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

eller, om vi skriver den ut med alle detaljer:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f\bigl(x, y(x)\bigr).$$

Den ukjente er altså en funksjon y av én variabel som vi her kaller x, mens høyresiden f er en gitt funksjon av to variabler x og y.

Eksistensproblemet for (1) er: Gitt et punkt (x_0, y_0) i planet, finnes det (minst) en løsning y av (1) med $y(x_0) = y_0$?

Entydighetsproblemet er: Dersom det finnes en løsning y av (1) med $y(x_0) = y_0$, er en slik løsning entydig gitt?

Under rimelige betingelser på høyresiden er svaret på begge spørsmålene ja:

Setning 1. *Anta at $f(x, y)$ er definert og kontinuerlig for alle (x, y) i en åpen mengde $D_f \subseteq \mathbb{R}$, og at den partiellderiverte $\partial f/\partial y$ likeledes eksisterer og er kontinuerlig i D_f.*

Dersom $(x_0, y_0) \in D_f$ så finnes det en løsning y av (1), definert på en omegn om x_0 og med $y(x_0) = y_0$.

Dersom y og $\tilde{y}$ er to løsninger av (1) med $y(x_0) = \tilde{y}(x_0)$, begge definert i et intervall I der $x_0 \in I$, så er $y(x) = \tilde{y}(x)$ for alle $x \in I$.

Jeg skal ikke bevise dette i full detalj, men jeg vil vise frem hovedidéene i beviset.

For enkelhets skyld velger vi $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Det vil si at vi søker løsninger av (1) som også oppfyller

$$y(0) = 0. \tag{2}$$

I tillegg ser vi bare etter løsninger *fremover* fra initialpunktet, altså løsninger definert for $x \geq 0$.

Å komme herfra til det generelle tilfelle er bare et spørsmål om enkle variabelskift, så vi taper ingen generalitet ved disse forenklingene.

2 Beviset

2.1 Preludium

For at (1) og (2) skal gi mening, må vi åpenbart anta at $(0,0) \in D_f$. Siden D_f er åpen, må f være definert i en omegn om origo. Og siden f er kontinuerlig, er den også begrenset i nærheten av origo, så vi kan regne med at

$$|f(x,y)| \leq M$$

for (x,y) tilstrekkelig nær $(0,0)$.

Hvis vi har en løsning y av (1) og (2) så gir sekantsetningen at $y(x) = y(x) - y(0) = y'(s) \cdot (x-0) = f(s, y(s)) \cdot x$ for en $s \in (0,x)$, og derfor

$$|y(x)| \leq Mx$$

når x er positiv og liten nok. Vi kan finne positive konstanter a og b slik at $Ma \leq b$ og

$$|f(x,y)| \leq M \qquad \text{for } x \in [0,a] \text{ og } y \in [-b,b], \tag{3}$$

og det følger at enhver løsning av (1) og (2) må oppfylle $y(x) \in [-b,b]$ for alle $x \in [0,a]$.

Vi skal også benytte at den partiellderiverte $f_y = \partial f/\partial y$ er kontinuerlig, og derfor begrenset på $[0,a] \times [-b,b]$:

$$|f_y| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$$

for en endelig konstant L. Vi skal benytte dette til å estimere forskjellen $f(x,\tilde{y}) - f(x,y)$. Hvis vi tenker på $f(x,y)$ som en funksjon av én variabel y, der x betraktes som en konstant, kan vi bruke sekantsetningen, og få $f(x,\tilde{y}) - f(x,y) = f_y(x,s) \cdot (\tilde{y} - y)$ for en s mellom y og $\tilde{y}$. Dermed har vi ulikheten

$$|f(x,\tilde{y}) - f(x,y)| \leq L|\tilde{y} - y| \qquad \text{for } x \in [0,a] \text{ og } y, \tilde{y} \in [-b,b]. \tag{4}$$

2.2 Entydighet

Vi kan nå ta fatt på entydighetsbeviset. Anta at y og $\tilde{y}$ er to løsninger til (1) og (2) definert for $x \in [0,a]$, og sett

$$u(x) = e^{-Lx}\Big|\tilde{y}(x) - y(x)\Big|.$$

Denne funksjonen er kontinuerlig, og den er også deriverbar i de punktene x der $u(x) > 0$, med

$$\begin{aligned}
u'(x) &= e^{-Lx}\Big(-L|\tilde{y}(x) - y(x)| \pm (\tilde{y}'(x) - y'(x))\Big) \\
&= e^{-Lx}\Big(-L|\tilde{y}(x) - y(x)| \pm \Big(f(x,\tilde{y}(x)) - f(x,y'(x))\Big)\Big) \\
&\leq e^{-Lx}\Big(-L|\tilde{y}(x) - y(x)| + L\Big(\tilde{y}(x)y'(x)\Big)\Big) \leq 0
\end{aligned}$$

på grunn av (4). (Fortegnet $\pm$ er fortegnet til $\tilde{y}(x) - y(x)$.) Men en kontinuerlig, ikke-negativ funksjon u med $u(0) = 0$ og $u'(x) \leq 0$ når $u(x) > 0$ må være 0 for positive x, så $u(x) = 0$ for $x \in [0,a]$, og dermed er $\tilde{y}(x) = y(x)$.

2.3 Eksistens

Jeg skal vise at (1), (2) har en løsning $y(x)$ definert for $x \in [0, a]$ dersom (3) og (4) holder.

Metoden kalles *Picard-iterasjon*, og bygger på at enhver løsning av (1), (2) oppfyller

$$y(x) = \int_0^x f(t, y(t))\,dt \tag{5}$$

takket være integralregningens fundamentalsetning ($y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)\,dt$).

Men for eksistensbeviset er det mer på sin plass å notere at enhver løsning av (5) også løser (1) og (2), som man ser ved direkte innsetting.

Inspirert av fikspunktiterasjon for å løse vanlige ligninger, prøver vi det samme for å løse (5), og setter

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_{n+1}(x) &= \int_0^x f(t, y_n(t))\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{6}$$

Vi håper nå at følgen $(y_n(x))$ vil konvergere mot en løsning $y(x)$ til (5).

Vi ser først at

$$|y_1(x)| = \left|\int_0^x f(x, 0)\,dx\right| \le Mx \le Ma \le b \qquad \text{for } x \in [0, a],$$

ved (3) og ulikheten $Ma \le b$. Spesielt kan vi bruke (3) igjen til å vise $|f(x, y_1(x))| \le M$, slik at vi får den samme ulikheten for y_2, og videre på samme måten for alle y_n, slik at vi i hvert fall ikke har noen problemer med å definere y_n for alle n ved iterasjonsskjemaet i (6).

Som sagt er vi ute etter å vise at (y_n) konvergerer. Vi skal gjøre det ved å vise at differensen $y_n - y_{n-1}$ går (fort!) mot null.

Først benytter vi (4) og estimatet $|y_1(x)| \le Mx$:

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\le \int_0^x |f(x, y_1(t)) - f(x, y_0(t))|\,dt \\ &= \int_0^x |f(x, y_1(t)) - f(x, 0)|\,dt \\ &\le \int_0^x L|y_1(t)) - 0|\,dt \le \int_0^x LMt\,dt = \frac{ML}{2}x^2, \end{aligned}$$

som i neste runde gir oss

$$\begin{aligned} |y_3(x) - y_2(x)| &\le \int_0^x |f(x, y_2(t)) - f(x, y_1(t))|\,dt \\ &\le \int_0^x L|y_2(t) - y_1(t)|\,dt \le \frac{ML^2}{2}\int_0^x t^2\,dt = \frac{ML^2}{6}x^3. \end{aligned}$$

Om vi fortsetter på denne måten kan vi vise ulikheten

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!}x^n$$

ved induksjon. Her skal vi bare benytte oss av den mindre skarpe ulikheten

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!}a^n. \qquad x \in [0, a] \tag{7}$$

men vi trengte den første versjonen i selve induksjonsbeviset.

Ettersom vi har $y_0(x) = 0$ så får vi

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(y_k(x) - y_{k-1}(x)\Big),$$

og dermed

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(y_k(x) - y_{k-1}(x)\Big)$$

dersom summen konvergerer. Men summen er absolutt konvergent, fordi (7) gir oss

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big|y_k(x) - y_{k-1}(x)\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ML^{n-1}}{n!}a^n = \frac{M}{L}(e^{La} - 1) < \infty,$$

slik at grensen $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ eksisterer.

Konvergensen er også *uniform* på $[0, a]$, for om $m > n$ er

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \Big|y_k(x) - y_{k-1}(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{ML^{k-1}}{k!}a^k < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!}a^k.$$

Her kan vi nå la $m \to \infty$, og få

$$|y(x) - y_n(x)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!}a^k.$$

Summen på høyresiden er uavhengig av x og går mot null når $n \to \infty$, og det gir uniform konvergens av $y_n(x)$ mot $y(x)$.

Vi vil nå ta grensen når $n \to \infty$ i (6), og få at $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ oppfyller (5). Men da må vi først vite at $f(t, y_n(t)) \to f(t, y(t))$ uniformt. Det er heldigvis ikke så vanskelig å vise ved hjelp av (4) og den uniforme konvergensen $y_n(t) \to y(t)$.

Eksistensbeviset er dermed fullstendig.

Jeg har nok feid en god del detaljer under teppet her. Det kan være en god øvelse å identifisere og fylle inn noen av disse.