Differensialligninger

2011-04-05

Generell første ordens differensialligning

Initialverdiproblem for ukjent funksjon $y = y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Eksistensteorem [Peano]:
Anta at f er kontinuerlig i en omegn om (x_0, y_0).
Da finnes en løsning av initialverdiproblemet i en omegn om x_0.

Med andre ord: Anta f er kontinuerlig for alle (x,y) i et rektangel $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1) \times (y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2)$.

Da finnes en $\delta > 0$ og en løsning y som er definert for alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Mangel på entydighet

Eksempel:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2} y^{1/3}, \qquad y(0) = 0$$

har løsningen $y = 0$ (for alle x).

Men det finnes andre løsninger . . . (tavleregning) . . .

Nemlig:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < C \\ (x - C)^{3/2} & x \geq C \end{cases}$$

der $C \geq 0$ er fritt valgbar.

Problemet ligger i mangelen på deriverbarhet mhp y av høyresiden i ligningen.

Eksistens og entydighet

Initialverdiproblem for ukjent funksjon $y = y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Eksistens- og entydighetsteorem [Picard–Lindelöf]
Dersom f og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ begge er kontinuerlige i en omegn om (x_0, y_0), så har initialverdiproblemet en *entydig* løsning i en omegn om x_0.

Beviset bygger på en ekvivalent formulering:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt.$$

Picard-iterasjon

Initialverdiproblem for ukjent funksjon $y = y(x)$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt.$$

Picards idé:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)\, dt, \quad y_0(x) = y_0.$$

Det viser seg at dersom $\delta > 0$ er liten nok, så konvergerer $y_n(x)$ uniformt mot en funksjon $y(x)$ på $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, og $y(x)$ vil løse ligningen.

Entydighet

Initialverdiproblem for ukjent funksjon $y = y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Dersom y_1 og y_2 er to løsninger og $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$, så blir

$$\frac{du}{dx} = f(x, y_1) - f(x, y_2), \quad u(x_0) = 0.$$

Det viser seg at når $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ er kontinuerlig, så finnes en konstant L slik at

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

Entydighet (fortsatt)

. . . og dermed vil $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$ oppfylle

$$\left|\frac{du^2}{dx}\right| = 2\left|u\frac{du}{dx}\right| \le 2Lu^2$$

og derfor

$$\left|\frac{d}{dx}\left(e^{-2Lx}u^2\right)\right| = e^{-2Lx}\left|\frac{d}{dx}\left(u^2\right) - 2Lu^2\right| \le 0$$

og siden $u(x_0) = 0$ så er $u^2 \le 0$ for alle $x > 0$, dvs $u = 0$, altså $y_1 = y_2$.

Førsteordens system av to differensialligninger

Initialverdiproblem for ukjente funksjoner $y = y(x)$ og $z = z(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad y(x_0) = y_0,$$
$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \qquad z(x_0) = z_0.$$

Også her gjelder eksistens- og entydighetsteoremer tilsvarende de for en differensialligning med en ukjent funksjon. *Eksempel*:

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \cos 0 = 1,$$
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \sin 0 = 0.$$

Fra annenordens differensialligning til system

Initialverdiproblem for ukjent funksjon $y = y(x)$:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0$$

kan skrives om til et system for to ukjente funksjoner $y = y(x)$ og $z = z(x)$:

$$\begin{aligned} y' &= z, & y(x_0) &= y_0, \\ z' &= f(x, y, z), & z(x_0) &= z_0. \end{aligned}$$