Uniform konvergens, Taylorrekker

2011-03-01

Punktvis og uniform konvergens

Vi sier at $f_n(x) \to f(x)$ punktvis for $x \in [a,b]$ dersom det for hver $x \in [a,b]$ og $\varepsilon > 0$ finnes N slik at

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Vi sier at $f_n(x) \to f(x)$ uniformt for $x \in [a,b]$ dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes N slik at

$$x \in [a,b] \text{ og } n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Hvis hver f_n er kontinuerlig på $[a,b]$ og $f_n(x) \to f(x)$ uniformt, så er f kontinuerlig, og

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{når } n \to \infty.$$

Uniform konvergens av potensrekker

Anta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < R$$

der $R > 0$. La $0 < r < R$. Da konvergerer rekken uniformt for $|x| \le r$.

... og derfor kan den integreres leddvis.

... og $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ har samme konvergensradius som originalen.

... og derivasjon er det omvendte av integrasjon, så det går også greit!

Summen av en konvergent potensrekke (I)

Anta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad |x| < R$$

der $R > 0$. Da gjelder

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

slik at vi også kan skrive

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad |x| < R.$$

Summen av en konvergent potensrekke (II)

Anta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \qquad |x-c| < R$$

der $R > 0$. Da gjelder

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

slik at vi også kan skrive

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \qquad |x-c| < R.$$

Om dette er tilfelle, kalles f *analytisk* i punktet c.

Et ikke helt opplagt faktum:

Under betingelsene over er f analytisk i hver x med $|x-c| < R$.

Taylorrekke

Taylorrekken til en funksjon f, sentrert i punktet $x = c$ er rekken gitt ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

(N-te delsum er Taylorpolynomet til f av grad N.)

Viktige Maclaurinrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\operatorname{atan} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Taylors formel med restledd

$$f(x) = P_{n-1}(x) + E_{n-1}(x) \qquad P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$E_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(x-c)^n$$

$$= \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n)}(t)\cdot(t-c)^{n-1}\,dt$$

Taylorrekken til f konvergerer mot $f(x)$ for alle x med $|x-c| < r$ dersom det finnes en endelig konstant M slik at

$$\frac{r^n}{n!}\cdot\left|f^{(n)}(s)\right| \le M, \qquad n = 1,2,3,\ldots,\ |s-c| < r.$$

Eulers formel

Maclaurinrekkene for e^x, $\cos x$ og $\sin x$ leder naturlig til

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

som kan brukes til å huske trigonometriske formler.
Eksempel: $e^{i(u+v)} = e^{iu}e^{iv}$ gir

$$\begin{aligned}
\cos(u+v) + i(\sin(u+v)) \\
&= (\cos u + i \sin u) \cdot (\cos v + i \sin v) \\
&= (\cos u \cos v - \sin u \sin v) + i(\cos u \sin v + \sin u \cos v)
\end{aligned}$$

så

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v,$$
$$\sin(u+v) = \cos u \sin v + \sin u \cos v.$$