Konvergens for iterativ metode og Newtons metode

2011-02-03

Konvergens for iterativ metode

(1) Dersom f er deriverbar i et intervall I med $|f'(x)| \le K$ for alle $x \in I$, så gjelder

$$|f(u) - f(v)| \le K|u - v| \qquad \text{for alle } u, v \in I.$$

(2) Dersom $f(r) = 0$ og

$$|f(u) - f(v)| \le K|u - v| \qquad \text{for en } K < 1 \text{ og alle } u, v \in [r - c, r + c],$$

$$x_0 \in [r - c, r + c], \quad x_{n+1} = f(x_n) \text{ for } n = 0, 1, \ldots$$

så vil $x_n \to r$ og $|x_n - r| \le K^n |x_0 - r|$.

(3) Dersom $a \le f(x) \le b$ for alle $x \in [a, b]$ og

$$|f(u) - f(v)| \le K|u - v| \qquad \text{for en } K < 1 \text{ og alle } u, v \in [a, b],$$

så finnes presis ett punkt $r \in [a, b]$ med $r = f(r)$.

Taylors formel med forenklet restledd

Disse gjelder når $x \to a$:

$$
\begin{aligned}
&(0) \quad f(x) = f(a) + O(x-a) \\
&(1) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + O\big((x-a)^2\big) \\
&(2) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2 + O\big((x-a)^3\big) \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&(n) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O\big((x-a)^{n+1}\big)
\end{aligned}
$$

Formel (n) (for $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$) krever at $f^{(n+1)}$ eksisterer og er begrenset «i nærheten av a», det vil si i et åpent intervall som inneholder a.

Konvergens for Newtons metode

Dersom f er to ganger deriverbar og f'' er begrenset i nærheten av r der $f(r) = 0$ og $f'(r) \neq 0$, så vil tallene i Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

konvergere mot r dersom startpunktet x_0 er valgt tilstrekkelig nær x_0.

Skriv $\delta_n = |x_n - r|$. Da finnes en konstant $M > 0$ slik at

$$M\delta_n \leq (M\delta_0)^{2^n} \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots$$

dersom δ_0 er liten nok.

Dette kalles *kvadratisk konvergens*.