Satellittbaner

Harald Hanche-Olsen

http://www.math.ntnu.no/~hanche/

Dette lille notatet er for spesielt interesserte. Det er *ikke* pensum. Men det hører til allmendannelsen å vite at satelittbaner kan beskrives ved kjeglesnitt.

Vi tenker oss en satellitt eller et annet himmellegeme som beveger seg i et tyngdefelt gitt ved en masse M som vi plasserer i origo. Bevegelsen vil være plan, så vi regner like godt i planet. Vi bruker polarkoordinater r og θ, som vil være funksjoner av tiden t. Men i tillegg vil også r være en funksjon av θ. Vår strategi vil være å helt eliminere tiden fra bevegelsesligningene.

Vi bruker følgende notasjon: $\dot{r}$ og $\dot{\theta}$ er de deriverte av henholdsvis r og θ med hensyn på tiden t, mens r' er den deriverte av r med hensyn på θ. Kjerneregelen gir oss umiddelbart

$$\dot{r} = r'\dot{\theta}.$$

Vi benytter oss av to bevegelseslover: Den første er *Keplers annen lov*, som er ekvivalent med bevarelsen av angulært momentum, og gjerne uttrykkes ved at arealfarten er konstant: Det vil si at linjestykket fra origo til satellittposisjonen beskriver et areal som vokser med konstant fart. Matematisk sett uttrykkes denne loven som

$$r^2\dot{\theta} = L,$$

der L er det dobbelte av (den konstante) arealfarten. (L er også lik satellittens totale angulære momentum dividert på dens masse.)

Den andre bevegelsesloven sier at totalenergien er konstant:

$$\tfrac{1}{2}(\dot{r})^2 + \tfrac{1}{2}(r\dot{\theta})^2 - \frac{GM}{r} = E,$$

der G er den universelle gravitasjonskonstanten, M er den sentrale massen, og E er totalenergien dividert med massen til satellitten. (De to første leddene er den kinetiske energien per masseeenhet. $\dot{r}$ er den radielle komponenten av hastigheten, og $r\dot{\theta}$ er hastighetskomponenten perpendikulært på den radielle retningen. De siste leddet på venstre side er potensialet i tyngdefeltet.)

Vi setter inn $\dot{r}$ fra den første ligningen i energiligningen, og deretter setter vi inn $\dot{\theta} = L/r^2$ fra den andre ligningen. Resultatet er

$$\frac{L^2(r')^2}{2r^4} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = E,$$

der vi heller innfører

$$z = \frac{1}{r}, \quad z' = -\frac{r'}{r^2}$$

slik at ligningen kan skrives

$$\tfrac{1}{2}(z')^2 + \tfrac{1}{2}z^2 - \frac{GM}{L^2}z = \frac{E}{L^2}.$$

Vi deriverer denne ligningen med hensyn på θ og får

$$z'z'' + zz' - \frac{GM}{L^2}z' = 0.$$

Så lenge $z' \neq 0$ kan vi dele med den felles faktoren z', og står til slutt igjen med

$$z'' + z = A, \qquad \text{der } A = \frac{GM}{L^2}.$$

Denne ligningen har generell løsning

$$z = A\bigl(1 - \epsilon\cos(\theta - \varphi)\bigr),$$

der ϵ og φ er konstanter. Ved å rotere aksekorset en vinkel φ endrer vi θ til $\theta - \varphi$, så vi kan like godt kaste bort den konstanten. Til slutt husker vi at vi hadde definert $z = 1/r$, så vi står igjen med ligningen

$$r = \frac{q}{1 - \epsilon\cos\theta}$$

der $q = 1/A$. Dersom $\epsilon = 0$ er dette ligningen for en sirkel med radius q. Dersom $\epsilon > 0$ er det ligningen for et kjeglesnitt med brennpunkt i 0, styrelinje i $x = -q/\epsilon$ og eksentrisitet ϵ.

For $0 < \epsilon < 1$ er banen en ellipse, for $\epsilon = 1$ en parabel, og for $\epsilon > 1$ er den en hyperbel. (Hyperbelen har to grener, men satellitten følger bare en av dem.)