LEDDVIS INTEGRASJON OG DERIVASJON AV POTENSREKKER:

Vi antar at potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergerer i $(-R, R)$, $R > 0$, med summen $s(x)$. Da gjelder:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{for hver } x \text{ med } |x| < R,$$

og

$$\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad \text{for hver } x \text{ med } |x| < R.$$

(Dette er Teorem 19, s. 506, Adams.)

Vi skal i det etterfølgende gi et bevis for dette viktige resultat som er forskjellig fra beviset i boksen. Det er flere grunner til dette. Beviset hos Adams unngår begrepet «uniform konvergens» av funksjonsfølger. Dette er et begrep som erfaringsmessig faller vanskelig. Men på den annen side er også beviset på s. 506–507 nokså vanskelig å forstå, så lite er vunnet ved å velge bokens bevis. Dessuten er uniform konvergens et begrep man møter mange steder i matematisk analyse, så det kan være nyttig å introdusere idéen så tidlig som mulig.

Vi skal starte med å se på

$$\left| \int_0^x s(t)\,dt - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right| = \left| \int_0^x \left(s(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n t^n \right) dt \right|$$

Det gjelder å bevise at det til hver $\varepsilon > 0$, finnes en $n_0 \in \mathbb{N}$ slik at dette uttrykket er mindre enn ε når $N \geq n_0$. En velkjent regneregel (Se Teorem 3(f), s. 292) gir:

$$\left| \int_0^x \left(s(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n t^n \right) dt \right| \leq \int_0^x \left| s(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n t^n \right| dt$$

Det er nå nærliggende å tro at siden partialsummene $s_N(t)$ konvergerer mot $s(t)$ i hvert punkt av $[0, x]$, så må det finnes et $n_0 \in \mathbb{N}$ slik at når $N \geq n_0$, så vil:

$$(\triangle) \qquad \left| s(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n t^n \right| < \frac{\varepsilon}{R} \qquad \text{for } t \in [0, x]$$

I så fall er vi i mål. Vi har da nemlig for $N \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \left(s(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n t^n \right) dt \right| &\leq \int_0^x \left| s(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n t^n \right| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{R} \int_0^x dt = \frac{\varepsilon}{R} \cdot x < \varepsilon \end{aligned}$$

siden vi her har antatt $0 < x < R$. (Dersom $-R < x < 0$, kan vi gå fram på tilsvarende måte.)

Det er to tvilsomme punkter i ovenstående argument!

1. Vi vet ikke at $\int_0^x s(t)\,dt$ eksisterer.

2. Vi vet heller ikke at ulikheten ($\triangle$) ovenfor holder for *samme* n_0 (når $\varepsilon > 0$ er gitt) for *alle* punktene i $[0, x]$.

La oss kommentere disse to punktene nærmere:

1. Dersom vi kan bevise at summefunksjonen s er kontinuerlig på $[0, x]$, følger integrerbarheten ut fra Teorem 2, s. 290, Adams.

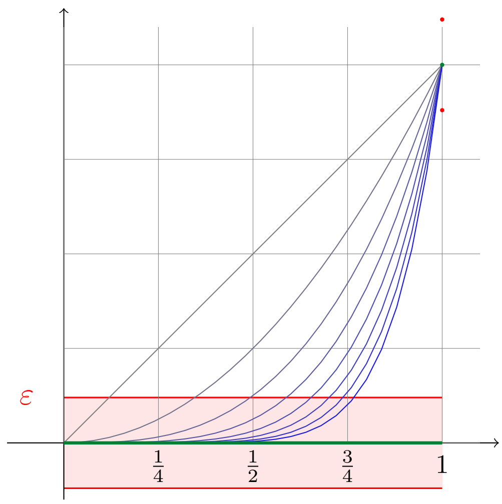
   Vi vet selvsagt at hver partialsum

$$s_N(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n t^n$$

   er kontinuerlig på hele tallinjen. Og det er da nærliggende å tro at grensefunksjonen s_N er kontinuerlig. *Men dette holder ikke generelt!* Dette framgår av følgende eksempel. La: $f_n(x) = x^n$; $x \in [0, 1]$. Dette gir en følge $\{f_n\}$ av kontinuerlige funksjoner som konvergerer mot grensefunksjonen gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

   Altså er grensefunksjonen diskontinuerlig i $x = 1$.



2. For å illustrere problemet som kan oppstå med hensyn til ulikheten ($\triangle$) studerer vi samme funksjonsfølge som ovenfor (se figur). For $x = \frac{1}{2}$ ser vi at

$$|f_n(\tfrac{1}{2}) - f(\tfrac{1}{2})| = |f_n(\tfrac{1}{2})| < \varepsilon$$

   når $n \geq 4$ for den angitte ε.

   For $x = \frac{3}{4}$ har vi at for å oppnå

$$|f_n(\tfrac{3}{4}) - f(\tfrac{3}{4})| < \varepsilon$$

for samme ε må vi ihvertfall anta $n \geq 8$. Og lar vi x_1 rykke nærmere 1, må vi for fastholdt $\varepsilon > 0$ stadig velge n_0 større for å være garantert at $n \geq n_0$ medfører at

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

når ε holdes fast!

De problemene vi har registrert i 1. og 2. ovenfor motiverer følgende

DEFINISJON: Vi sier at funksjonsfølgen $\{f_n\}$,

$$f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

konvergerer uniformt mot en funksjon:

$$f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

dersom det til hvert $\varepsilon < 0$ finnes et $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq n_0$ så gjelder: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *for alle* $x \in [a,b]$. (Betegnelsen $n_0(\varepsilon)$ indikerer at n_0 bare avhenger av ε og ikke av x.) Det vi kaller *punktvis konvergens* kan formuleres slik:

Til hvert $\varepsilon > 0$ og hvert $x \in [a,b]$ finnes det et $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq n_0$ så vil:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

At $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ betyr at n_0 svarende til et gitt $\varepsilon > 0$ også vil avhenge av x. Dette illustreres ved eksemplet foran.

Når det gjelder symbolbruken lar man:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

betegne punktvis konvergens, mens man gjerne skriver:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{uniformt} \text{ på } [a,b],$$

for å betegne uniform konvergens.

Vi kan nå bevise følgende viktige

TEOREM A: Anta at funksjonsfølgen $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f på $[a,b]$ og at hver funksjon f_n er kontinuerlig. Da gjelder følgende:

(i) f er kontinuerlig på $[a,b]$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

MERKNAD: Integrerbarheten av f på $[a,b]$ følger av (i).

BEVIS:

(i) Det gjelder å bevise at til hvert $\varepsilon > 0$ og fastholdt $x_0 \in [a,b]$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $x \in [a,b]$ og $|x - x_0| < \delta$ så er

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Siden $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *uniformt*, må det finnes $n_0 = n_0(\varepsilon)$, slik at $n \geq n_0$ medfører at

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \text{ for } \textit{alle } \ x \in [a,b].$$

Vi fastholder så et $n_1 \geq n_0$. Siden hver f_n er kontinuerlig, finnes det et $\delta > 0$ slik at når $x \in [a,b]$ og $|x - x_0| < \delta$, så gjelder:

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \varepsilon/3$$

Vi har da for $x \in [a,b]$ og $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_1}(x) + f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0) + f_{n_1}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| + |f_{n_1}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Siden $\varepsilon > 0$ og $x_0 \in [a,b]$ var fritt valgt, betyr dette at f er kontinuerlig på hele $[a,b]$.

(ii) Her gjelder det å bevise at for hver $\varepsilon > 0$ finnes det et $n_0 \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq n_0$, så vil:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

(Her bør en merke seg at integrerbarheten av f på $[a,b]$ følger av (i).) Siden $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformt, vet vi at det finnes $n_0 \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq n_0$, så vil:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$$

for *alle* $x \in [a,b]$. Vi har da for $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| &= |\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon.\end{aligned}$$

FORELØPIG TILBAKEBLIKK:

Ser vi på de «tvilsomme» punkter i beviset for annen del av Teorem 19, (det vi betegnet som 1. og 2. foran), ser vi at vi er i mål dersom vi kan bevise følgende

TEOREM B: Hvis potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergens-intervall $(-R, R)$ med summefunksjon $s(x)$, så vil

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = s(x) \quad \text{uniformt}$$

på hvert lukket delintervall $[a, b]$ som er inneholdt i $(-R, R)$.

MERKNAD: Dette resultat gir da både at s er kontinuerlig og dermed integrerbar på $[0, x]$ - og at ulikheten $(\triangle)$, s.2, holder på $[0, x]$.

BEVIS: Vi kan for å forenkle argumentet anta at det lukkede intervall vi ser på er $[0, x]$, der $0 < x < R$. (Den mer generelle situasjonen omtalt i teoremet bevises helt analogt.) Lar vi $t \in [0, x]$ har vi:

$$|a_n t^n| \leq |a_n|\,|x|^n$$

Siden $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer *absolutt* for hver $x \in (-R, R)$, (Teorem 17, s. 502–503, Adams), konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n$. Dvs. at for $\varepsilon > 0$ finnes det et n_0 slik at $N \geq n_0$ impliserer at $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|\,|x|^n < \varepsilon$. Dette gir for hver $t \in [0, x]$:

$$\left| s(t) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n t^n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \Big| |a_n| x \Big|^n < \varepsilon$$

Altså har vi at:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n t^n = s(t) \quad \textit{uniformt} \text{ på } [0, x].$$

MERKNAD: Vi har nå fullført beviset for den siste påstanden i Teorem 19. Den første delen som gjelder derivasjon ledd for ledd,

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

for hvert x i konvergensintervallet, følger nå nokså greit v.h.a. fundamentalteoremet kombinert med følgende

LEMMA: Hvis potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer i $(-R, R)$, så vil også potensrekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

konvergere i dette intervallet.

BEVIS FOR LEMMA: Vi antar for enkelhets skyld at $0 < x < R$. La $y \in (x, R)$. Vi har da:

$$|n a_n x^{n-1}| = |a_n| \cdot n \left| \frac{x}{y} \right|^{n-1} \cdot |y|^{n-1}$$

Vi har at $\lim_{n \to \infty} n|x/y|^{n-1} = 0$ siden $|x| < |y|$ og $\lim\limits_{t \to \infty} t/a^t = 0$ når $a > 1$ (3.4 Adams). Altså finnes det $n_0 \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq n_0$ så vil $n\,|x/y|^{n-1} < 1$. Altså har vi for $n \geq n_0$ at

$$|n a_n x^{n-1}| \leq |a_n|\,|y|^{n-1}$$

Konvergens av rekken $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,|y|^{n-1}$ gir da at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ konvergerer. $\square$

Ut fra det vi har vist tidligere kan da rekken $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ med sum $S(x)$ integreres ledd for ledd på intervallet $[0,x],\ 0<x<R$. Dette gir:

$$\begin{aligned}\int_0^x S(t)dt &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x na_nt^{n-1}\,dt\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = s(x) - a_0\end{aligned}$$

Derivasjon gir da ut fra fundamentalteoremet:

$$S(x) = s'(x)$$

eller

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

siden

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

forutsatt at f er kontinuerlig. $\square$

HISTORISK MERKNAD:

Niels Henrik Abel (1802–1829) oppdaget at A.L. Cauchy (1789–1857) hadde begått den feil at han tok det for gitt at dersom en følge $\{f_n\}$ av kontinuerlige funksjoner konvergerte punktvis mot en grensefunksjon f, så måtte f også være kontinuerlig. Vårt eksempel viser at dette er galt. Begrepet «uniform konvergens» ble introdusert av P. Seidel (1821–1896) og G. Stokes (1819–1903) uavhengig av hverandre i 1847. Men det var K. Weierstrass (1815–1897) som først så betydningen av dette begrep og brukte det systematisk i sine forelesninger i Berlin.