Komplekse tall og Eulers formel

Harald Hanche-Olsen

2011-03-24

1. Oppvarming

Jeg vil anta at leseren er kjent med komplekse tall, men vil likevel si noen ord om temaet.

Naivt kan man starte med bare å postulere eksistensen av en kvadratrot av -1 som vi kaller i, altså

$$i^2 = -1.$$

Dersom vi forutsetter at de mest grunnleggende regneregler for de reelle tall (kommutativitet og assosiativitet for addisjon og multiplikasjon, samt den distributive lov) fortsatt gjelder, oppdager vi fort at vi får

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)(c+di) = ac+bidi+adi+bic &= (ac-bd)+(ad+bc)i,\end{aligned}$$

som viser at innføringen av i ikke tvinger oss til å innføre mer generelle tall enn $a+bi$ for reelle a og b. Vi kan også dividere uten å innføre flere tall, for $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \neq 0$ om a og b er reelle og ikke begge lik null, slik at vi kan skrive

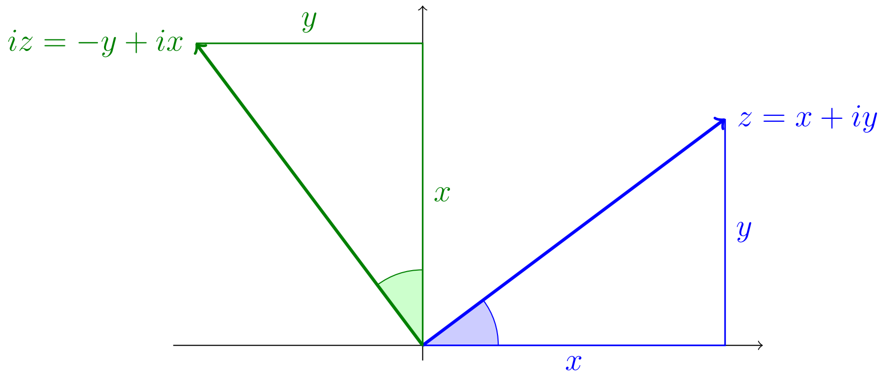
$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

(for å mate det inn med teskjeer).

Alt dette viser at innføringen av de komplekse tall utvider den reelle tallinjen til det komplekse plan, der $a+bi$ tilsvarer punktet i planet med reelle koordinater (a,b). Vi er interessert i å forstå hva de aritmetiske operasjonene betyr geometrisk i planet.

Addisjon er enkelt nok: Det svarer til helt vanlig vektoraddisjon. Multiplikasjon med et reellt tall a er også enkelt: Det svarer til at man strekker alle vektorer med faktoren a, så lengden av az blir $|a|$ ganger lengden til z. (Hvis $a<0$ blir orienteringen snudd i tillegg. Og hvis $|a|<1$ er det snakk om krymping heller enn strekking.)

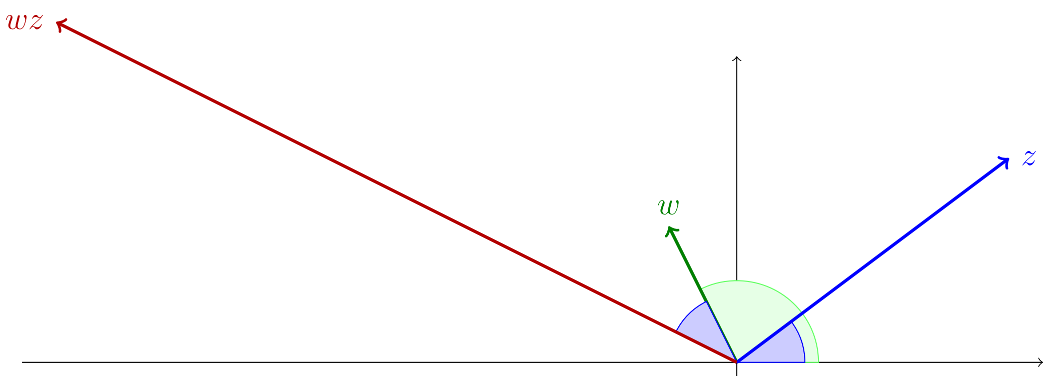
Men hva er multiplikasjon med i? Funsjonen $f(z) = iz$ er for det første lineær, og for det andre er den slik at $f(x) = ix$ for reelle x, mens $f(iy) = -y$ for reelle y. Så enten z ligger på den reelle eller på den imaginære aksen, så vil f rotere den $90°$ mot klokka mens lengden beholdes. Det følger at det samme må skje med en generell $z = x+iy$ (se figur 1).



Figur 1: Multiplikasjon med i roterer vektoren $z = x + iy$ en rett vinkel 90° over i $iz = -y + ix$. Merk at de to markerte vinklene er like store.

Vi kan få enda mer informasjon ut av figur 1: Nå snur vi nemlig på flisa og spør: Hva gjør multiplikasjon med z? Vi holder altså z fast og betrakter funksjonen $g(w) = wz$. Åpenbart er $g(1) = z$ og $g(i) = iz$. Begge er markert i figuren. Åpenbart kan vi lage $g(1) = z$ ved å ta vektoren 1 (på den reelle, det vil si horisontale, aksen), strekke den en faktor $|z|$ og rotere med den skyggelagte vinkelen. Likedan kan vi lage $g(i) = iz$ ved å ta vektoren i (på den imaginære, det vil si vertikale, aksen), strekke den en faktor $|z|$ og rotere med den skyggelagte vinkelen.

Et lignende argument som foran fører til at vi kan generalisere dette til en vilkårlig w: Så vi får wz ved å starte med w, strekke den en faktor $|z|$ (som gir oss $|z|w$) og så rotere den resulterende vektoren en vinkel lik vinkelen fra den reelle aksen til z. Beviset er bare å skrive $w = u + vi$ for reelle u og v, og se at denne beskrivelsen er rett for u og vi hver for seg, og dermed også for summen.



Figur 2: Vinkelen mellom wz og den reelle aksen er summen av vinklene mellom henholdsvis w og z og den reelle aksen. De to små vinklene i figuren er like store.

2. Den komplekse eksponentialfunksjonen og Eulers formel

Den reelle eksponentialfunksjonen oppstår mer eller mindre naturlig som løsning til en differensialligning: $x = e^t$ oppfyller $x'(t) = x(t)$ og initialbetingelsen $x(0) = 1$.

Vi vil prøve å gi mening til uttrykket e^{it} der t reell. Analogt med det reelle tilfellet er det naturlig å forvente at $z = e^{it}$ skal oppfylle differensialligningen og initialbetingelsen

$$z'(t) = iz(t), \quad z(0) = 1.$$

Men iz er ortogonal på z, det vil si $z' \perp z$, og da vil z ha konstant lengde. Faktisk finner vi

$$\frac{d}{dt}|z|^2 = \frac{d}{dt}(z\bar{z}) = z'\bar{z} + z\bar{z}' = iz\bar{z} + z \cdot (-i\bar{z}) = i|z|^2 - i|z|^2 = 0.$$

(Her er $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ når $z = x + iy$ med x og y reelle. Om du tviler på regnereglene brukt her kan du lett verifisere dem selv, eller du kan bruke vanlig vektorregning i planet i stedet.) Siden $z(0) = 1$ må den konstante lengden være $|z(t)| = 1$.

Så $z(t)$ ligger alltid på enhetssirkelen, den starter med $z(0) = 1$, og den beveger seg rundt enhetssirkelen i positiv omløpsretning når t vokser (fordi $z' = iz$ er z rotert $90°$ i positiv retning). Og *buelengden* fra 1 til $z(t)$ målt langs enhetssirkelen er

$$\int_0^t |z'(s)|\, ds = \int_0^t |iz(s)|\, ds = \int_0^t 1\, ds = t$$

når $t > 0$. Hvor har vi hørt dette før? Buelengde langs enhetssirkelen, det er det samme som vinkel i radianer. Så $z(t)$ danner en vinkel t med den reelle aksen, og har derfor x-koordinat $\cos t$ og y-koordinat $\sin t$.

Vi ledes derfor ubønnhørlig mot *Eulers formel*:[1]

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t}$$

Vi kan verifisere at denne faktisk oppfyller differensialligningen vi startet med:

$$\frac{de^{it}}{dt} = -\sin t + i \cos t = ie^{it}.$$

Det er heller ikke så vanskelig å se at addisjonsregelen

$$e^{i(u+v)} = e^{iu}e^{iv}$$

ikke er noe annet enn de trigonometriske addisjonsformlene

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v, \quad \sin(u + v) = \cos u \sin v + \sin u \cos v$$

slått sammen til én kompleks ligning (øving: vis det).

[1]Etter Leonhard Euler (1707–1783), en av tidenes mest produktive matematikere. Det arbeides fortsatt med å gi ut hans samlede verker (*Opera Omnia*). Første serie er på 29 bind, og det er planlagt minst tre serier til.

Det faller naturlig å bruke addisjonsformelen til å forsøke å definere eksponentialfunksjonen for alle komplekse argumenter:

$$\boxed{e^{s+it} = e^s e^{it} = e^s(\cos t + i \sin t)}$$

En annen tilnærming til den komplekse eksponentialfunksjonen er via Maclaurinrekken

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

som vi vet er gyldig for alle *reelle* z. Men rekken gir også mening for komplekse z. Spesielt, om vi setter inn $z = it$ og benytter $i^{2k} = (-1)^k$ og $i^{2k+1} = (-1)^k i$, får vi

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = \cos t + i \sin t,$$

som passer med det vi har funnet før – men dette virker mer magisk, og gir kanskje mindre innsikt, enn vår første tilnærming.

Men når vi først bedriver denne sorten magi, kan vi også verifisere at addisjonsformelen virkelig holder når vi definerer eksponentialfunksjonen ved hjelp av Maclaurinrekken:

$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n && \text{per definisjon} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k && \text{binomalformelen} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} z^{n-k} w^k && \text{definisjon av binomialkoeffisienten} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n\right) && \text{Cauchys produktformel} \\
&= e^z e^w && \text{per definisjon}
\end{aligned}$$

hvis vi forutsetter at teorien for reelle potensrekker lar seg generalisere til komplekse potensrekker på denne måten (og det gjør den!).

2.1. Anvendelser av Eulers formel på trigonometri

Eulers formel kan brukes til å forenkle mange utledninger av og manipulasjoner med trigonometriske identiteter. Først og fremst legger vi merke til disse umiddelbare følgene av Eulers formel:

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \cos t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.}$$

La oss prøve å skrive $\cos^5 t$ som en lineærkombinasjon av enkle trigonometriske funksjoner. Vi starter med

$$\begin{aligned}\cos^5 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^5\\ &= \frac{1}{32}(e^{5it}+5e^{4it}e^{-it}+10e^{3it}e^{-2it}+10e^{2it}e^{-3it}+5e^{it}e^{-4it}+e^{-5it}),\end{aligned}$$

slår sammen eksponentialfunksjonene i parentesen og bytter litt om på rekkefølgen:

$$\begin{aligned}\cos^5 t &= \frac{1}{32}\Big(e^{5it}+e^{5it}+5(e^{3it}+e^{-3it})+10(e^{it}+e^{-it})\Big)\\ &= \frac{1}{16}(\cos 5t+5\cos 3t+10\cos t).\end{aligned}$$

I den motsatte retningen har vi *de Moivres formel*:[2]

$$\boxed{(\cos t+i\sin t)^n=\cos nt+i\sin nt}$$

som er en triviell konsekvens av Eulers formel og addisjonsformelen for eksponentialfunksjonen (erstatt uttrykket i parentesen med e^{it}).

Som et eksempel på bruk av denne formelen har vi

$$\begin{aligned}\cos 3t+i\sin 3t &= (\cos t+i\sin t)^3\\ &= \cos^3 t+3i\cos^2 t\sin t+3i^2\cos t\sin^2 t+i^3\sin^3 t\\ &= \cos^3 t+3i\cos^2 t\sin t-3\cos t\sin^2 t-i\sin^3 t,\end{aligned}$$

og sammenligner vi realdel og imaginærdel hver for seg får vi

$$\cos 3t=\cos^3 t-3\cos t\sin^2 t,\qquad \sin 3t=3\cos^2 t\sin t-\sin^3 t.$$

Tillegg

A. Historisk note

De komplekse tall kom antagelig først til syne i forbindelse med løsningen av tredjegradsligningen.[3] Ved hjelp av en passende substitusjon (erstatt x med $x-a$ for en konstant a) kan den generelle tredjegradsligningen reduseres til formen

$$x^3-3px+2q=0.$$

[2]Etter Abraham de Moivre (1667–1754).

[3]Metoden som beskrives her, kalles gjerne *Cardanos metode* etter Gerolamo Cardano (1501–1576), som publiserte den i 1545. Men det var antagelig Scipione del Ferro (1456–1526) som hadde løsningen først. Niccolò Fontana Tartaglia (1500–1557) gjenoppdaget løsningen, og viste den til Cardano mot et løfte om hemmelighet. Men da Cardano oppdaget løsningen i et manuskript av del Ferro, følte han seg ikke bundet av taushetsløftet til Cardano, og publiserte løsningen. Tartaglia tok det ille opp.

For å løse denne ligningen setter vi inn

$$x = u + v,$$

og etter litt opprydning ender vi med

$$u^3 + v^3 + 3(uv - p)(u + v) + 2q = 0.$$

Nå insisterer vi også på å sette

$$uv = p,$$

slik at ligningen reduserer seg til

$$u^3 + v^3 + 2q = 0.$$

Her setter vi så inn $v = p/u$ og multipliserer med u^3, og får

$$u^6 + 2qu^3 + p^3 = 0,$$

som er en kvadratisk ligning med ukjent u^3. Vi kan bruke formelen for løsning av annengradsligningen, eller vi kan komplettere kvadratet og rydde enda litt:

$$(u^3 + q)^2 = q^2 - p^3,$$

med løsninger

$$u^3 = -q \pm \sqrt{q^2 - p^3}.$$

Produktet av de to løsningene er p^3, men siden $uv = p$ og dermed $u^3v^3 = p^3$, følger det at om den ene løsningen er u så er den andre løsningen v. Å bytte om u og v endrer ikke løsningen x til den opprinnelige ligningen, så vi kan velge plusstegnet og skrive

$$u^3 = -q + \sqrt{q^2 - p^3}.$$

Denne ligningen har presis tre komplekse løsninger, og hver av dem gir en av tre løsninger $x = u + v = u + p/u$ til den opprinnelige ligningen.

Poenget med denne utredningen er at selv om den opprinnelige ligningen har tre reelle røtter, så bruker denne metoden komplekse tall for å finne dem. For å gå litt mer i detalj, så har uttrykket $P(x) = x^3 - 3px + 2q$ et lokalt ekstrempunkt der hvor $3x^2 - 3p = 0$, det vil si to slike, $x = \pm\sqrt{p}$, dersom $p > 0$. Men $P\big(\pm\sqrt{p}\big) = 2(q \mp p^{3/2})$, og disse har motsatt fortegn presis når $q^2 < p^3$. I dette tilfellet har altså $P(x) = x^3 - 3px + 2q$ tre reelle nullpunkter, men vi ser også at i dette tilfellet blir u^3 ikke reell. Så Cardanos metode *krever* virkelig komplekse tall for å la oss regne ut reelle røtter.

del Ferro, Tartaglia og Cardano så nok på disse mellomresultatene med adskillig skepsis, men sluttresultatet stemte jo, så de kunne ikke annet enn godta det. De komplekse tall ble først stuerene mye senere, men dét er en annen historie.