Logaritmer og eksponentialfunksjoner

Harald Hanche-Olsen og Marius Irgens

2011-02-02

Dette notatet ble først laget for MA1102 våren 2008. Denne versjonen er omskrevet for MA1102 våren 2011.

Du vil oppdage at mange detaljer er utelatt. De er utelatt med vilje, for at du skal fylle dem ut selv! Spesielt bør du fylle ut detaljene hver gang det kommer et spørsmål, men ikke bare da.

1 Oppvarming

Kanskje startet bruken av potenser som en ren latskap? Det er litt kortere å skrive 3^7 enn $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Uansett hva årsaken er til notasjonen er vi enige om at hvis n er et positivt heltall, og a er et tall, så skal a^n bety

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ganger}}$$

Hvis n og m er to positive heltall burde det da være lett å overbevise seg selv om at

$$a^n a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ganger}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ ganger}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n+m \text{ ganger}} = a^{n+m}. \tag{1}$$

At vi også bør definere

$$a^0 = 1 \tag{2}$$

faller naturlig, fordi det gjør (1) gyldig også når $m = 0$ eller $n = 0$.

Fortsatt med n som et positivt heltall, har sikkert de fleste av dere vært med på å definere $a^{1/n}$ som det positive tallet som opphøyd i n-te gir a (med andre ord n-teroten av a). Med andre ord betyr

$$a^{1/n} = b$$

det samme som

$$a = b^n.$$

Når n er et partall er det en forutsetning her at a er positiv, så la oss fra nå av nøye oss med å ta potenser av positive tall. Vi blir også fort enige om at $a^{m/n}$ må bety

$$a^{m/n} = a^{\overbrace{1/n + 1/n + \cdots + 1/n}^{m \text{ ganger}}} = \overbrace{a^{1/n} \cdot a^{1/n} \cdots a^{1/n}}^{m \text{ ganger}} = (a^{1/n})^m.$$

Hvis r er et positivt tall har vi også blitt enige om at a^{-r} skal bety

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Dermed er vi enige om hva det vil si å opphøye et (positivt) tall a i en potens r, a^r, så lenge r er et rasjonalt tall. Underveis har det hele tiden vært et prinsipp at (1) skal fortsette å gjelde mer generelt:

$$a^{r+s} = a^r a^s \qquad \text{for alle } r, s \in \mathbb{Q}. \tag{3}$$

Men hva skal for eksempel $2^{\sqrt{2}}$ bety? Det er absolutt legitimt å spørre seg selv: «Hvorfor skal vi bry oss med det?», og du kan jo prøve å finne noen gode svar på det spørsmålet selv. Hvis du ikke kommer på et godt svar med en gang, kan du jo ha spørsmålet i bakhodet mens du leser videre, og se om du gradvis formulerer et svar etter hvert. Kanskje får du flere svar, og kanskje endrer du mening underveis?

2 Eksponentialfunksjoner

Det vi har gjort over definerer hva funksjonen

$$g(u) = a^u$$

er hvis a er et positivt tall og u er et rasjonalt tall. En annen måte å si det på, er at definisjonsmengden til g er $D_g = \mathbb{Q}$. Vi kaller denne funksjonen *eksponentialfunksjonen med grunntall a*. Innholdet i ligning (1) blir her $g(u+v) = g(u)g(v)$ eller $a^{u+v} = a^u a^v$.

Når vi nå ønsker å utvide g til å være definert for alle reelle tall, skal vi fortsatt tviholde på (2) og (3), men sistnevnte nå for generelle reelle eksponenter. Men skal vi få til det, blir vi nødt til å kreve litt mer, slik som for eksempel *kontinuitet.* Vi lager oss derfor like godt en abstrakt definisjon:

Definisjon 1. En *eksponentialfunksjon* er en *kontinuerlig* funksjon g definert for alle reelle tall ($D_g = \mathbb{R}$) som er slik at $g(0) = 1$ og

$$g(u+v) = g(u)g(v) \tag{4}$$

er oppfylt for alle $u, v \in \mathbb{R}$.

Dersom $g(1) = a$ sier vi at g er en eksponentialfunksjon med *grunntall a*.

La oss først påpeke noen enkle egenskaper ved eksponentialfunksjoner generelt. I listen nedenfor er g en eksponentialfunksjon:

1. $g(nu) = g(u)^n$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$.

   Bevis: Enkel induksjon på n med bruk av (4).

2. $g(u) > 0$ for alle u.

   Bevis: $g(u) = g(2 \cdot \frac{1}{2}u) = g(\frac{1}{2}u)^2 \geq 0$. Og $1 = g(0) = g(u-u) = g(u)g(-u)$, så $g(u) \neq 0$.

3. $g(nu) = g(u)^n$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{Z}$.

   Bevis: $g(-u) = g(u)^{-1}$ følger av beviset i forrige punkt. Så hvis $n > 0$ blir $g(-nu) = (g(u)^n)^{-1} = g(u)^{-n}$.

4. $g(u/n) = g(u)^{1/n}$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$.

5. $g(ru) = g(u)^r$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og $r \in \mathbb{Q}$.

Vi overlater beviset for de to siste punktene til leseren. For det siste, skriv $r = m/n$ og kombinér de to foregående punktene.

Nå er vi klar for et resultat som viser at definisjonen ovenfor fanger opp essensen i eksponentialfunksjonen med grunntall a:

Proposisjon 2. *Det kan ikke finnes mer enn én eksponentialfunksjon med et gitt grunntall a.*

Beviset er enkelt nok: Det siste punktet i opplistingen ovenfor med $u = 1$ gir at

$$g(r) = g(1)^r = a^r \qquad \text{for alle } r \in \mathbb{Q}.$$

Dersom nå g_1 og g_2 er to eksponentialfunksjoner, begge med samme grunntall a, så vil de begge oppfylle ligningen over, og derfor er

$$g_1(r) = g_2(r) \qquad \text{for alle } r \in \mathbb{Q}.$$

Men to kontinuerlige funksjoner som har samme verdier på alle *rasjonale* tall må ha samme verdier på alle *reelle* tall, så de er samme funksjon.

Nå står vi svært fritt til å velge metode for å konstruere eksponentialfunksjoner. Samme hvilken metode vi bruker, hvis vi bare kan vise at den oppfyller betingelsene i Proposisjon 2, så må den være den «riktige» eksponentialfunksjonen (med et gitt grunntall).

Nøkkelen til en vellykket og likefrem konstruksjon viser seg å være deriverbarhet: Vi prøver å lage oss en eksponentialfunksjon som ikke bare er kontinuerlig, men deriverbar i tillegg. Det viser seg nok å anta deriverbarhet i ett punkt: Anta nemlig at g er en eksponentialfunksjon som er deriverbar i $u = 0$, og med derivert A, det vil si at grensen

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h}$$

eksisterer (husk at $g(0) = 1$). Men da blir virkelig g deriverbar overalt, for det følger at

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(u+h) - g(u)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(u)g(h) - g(u)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h} g(u) = Ag(u)$$

for alle $u \in \mathbb{R}$. Vi har altså vist

Proposisjon 3. *Dersom en eksponentialfunksjon g er deriverbar i 0, så er g deriverbar overalt, og*

$$g'(u) = Ag(u) \qquad \textit{for alle } u \in \mathbb{R}, \textit{ der } A = g'(0). \tag{5}$$

Siden $g(u) > 0$ bestandig, følger det av dette at g er en strengt voksende funksjon dersom $A > 0$ og strengt avtagende dersom $A < 0$. Spesielt kan vi sammenligne verdiene $g(0) = 0$ og $g(1) = a$ og konkludere at $A > 0$ hvis og bare hvis $a > 1$ og $A < 0$ hvis og bare hvis $a < 1$. Vi har også følgende nyttige estimat:

Proposisjon 4. *En deriverbar eksponentialfunksjon g oppfyller ulikheten*

$$g(u) \geq 1 + Au \qquad \text{for alle } u \in \mathbb{R}, \text{ der } A = g'(0).$$

Ulikheten er ekte unntatt for $u = 0$ eller $A = 0$, da likhet gjelder.

Bevis. Vi beviser dette bare for $A > 0$ og $u > 0$. Vi finner

$$\frac{g(u) - 1}{u} = \frac{g(u) - g(0)}{u - 0} \overset{*}{=} g'(t) = Ag(t) > A,$$

der sekantsetningen garanterer eksistensen av en t med $0 < t < u$ slik at likheten merket $*$ holder, og ulikheten til sist gjelder fordi g er strengt voksende. Det er nå lett å ordne på ulikheten og få $g(u) > 1 + Au$.

De andre tilfellene overlates til leseren. □

Følgesetning 5. *Vi har*

$$\lim_{u \to \infty} g(u) = \infty, \quad \lim_{u \to -\infty} g(u) = 0 \qquad \text{dersom } A > 0.$$

De to grensene bytter plass dersom $A < 0$.

Vi overlater beviset til leseren. Hint: Den første grensen følger fra Proposisjon 4. Den andre grensen følger av den første fordi $g(-u) = g(u)^{-1}$.

3 Logaritmer

Vi har nå vist noen enkle egenskaper til en deriverbar eksponentialfunksjon (hvis noe slikt skulle finnes), men det viser seg enklere å *konstruere* den omvendte funksjonen, også kjent som en logaritmefunksjon.

Fra det foregående følger det at en deriverbar eksponentialfunksjon g har en omvendt funksjon f definert på $\mathbb{R}_+$ dersom $a = g(1) \neq 1$. (Benytt monotoniteten sammen med Følgesetning 5 for å overbevise deg selv om det!) Ikke bare det, men den omvendte funksjonen er deriverbar. Formelen for den deriverte av den omvendte funksjonen er gjerne egnet til å forvirre, så vi utleder den like gjerne direkte, men vi tar for gitt at vi allerede *vet* (ut fra generell teori) at den er deriverbar. Så vi deriverer begge sider i ligningen $g(f(x)) = x$ og får

$$g'(f(x))f'(x) = 1,$$

setter inn fra (5) og får

$$Ag(f(x))f'(x) = 1$$

der vi igjen setter inn $g(f(x)) = x$ og får til sist

$$f'(x) = \frac{1}{Ax}.$$

Hvis vi ser på et lukket intervall i $\mathbb{R}_+$ har vi at $f'(x) = 1/(Ax)$ er integrerbar på dette intervallet (hvorfor? du kan ikke bruke at du kjenner en antiderivert til $1/x$ ennå (hvorfor ikke?)). Vi vet selvfølgelig også at f er en antiderivert til f'. Dermed sier analysens fundamentalsetning (se tillegget) at

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)dt = \int_c^x \frac{1}{At}\,dt = \frac{1}{A}\int_c^x \frac{1}{t}dt$$

hvis c og x er positive tall. Vi er interessert i $f(x)$. Legg merke til at ligningen over er sann for alle positive c. For eksempel kan vi bruke $c = 1$, og vi gjør selvfølgelig dette valget fordi vi har $g(0) = 1$, og dermed $f(1) = 0$. Dette gjør uttrykket enklest mulig:

$$f(x) = \frac{1}{A}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt. \tag{6}$$

Det aller enkleste valget her får vi ved å sette $A = 1$. Vi får da en funksjon med et navn vi kjenner fra før:

Definisjon 6. Den *naturlige logaritmen* er en funksjon ln med definisjonsmengde $D_{\ln} = \mathbb{R}_+$, som er definert ved

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt. \tag{7}$$

Vi har startet med nesten ingenting, og kommet frem til den funksjonen vi nettopp konstruerte. Men vi kan nå si ganske mye om funksjonen:

Setning 7. $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ *har disse egenskapene:*

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.
3. $\ln xy = \ln x + \ln y$.
4. $\ln x$ *er en strengt voksende funksjon.*
5. *For* $n \in \mathbb{N}$ *har vi* $\ln(a^n) = n \ln a$.
6. $\ln x \to \infty$ *når* $x \to \infty$.
7. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
8. $\ln x \to -\infty$ *når* $x \to 0^+$.

9. *For ethvert tall* $u \in \mathbb{R}$ *så finnes det nøyaktig ett tall* $y \in \mathbb{R}_+$ *slik at* $\ln y = u$.

Merknad 8. Her må vi passe litt på. Vi ser jo for oss at ln skal bli den inverse av en (deriverbar) eksponentialfunksjon, og mange av egenskapene i Setning 7 følger av nettopp det og egenskapene til eksponentialfunksjonen. Men dette kan vi ikke benytte her, for vi holder jo nettopp på med å *konstruere* eksponentialfunksjoner. Vi har ennå ikke vist at de finnes, og spesielt kan vi jo ikke benytte oss av egenskapene til disse funksjonene – som det kunne tenkes ikke finnes – i beviset.

Legg spesielt merke til det siste punktet i Setning 7. Det sier at bildet $V_{\ln}$ til ln er hele tallinjen, og at ln er en injektiv (en-til-en) funksjon. Dermed har ln en omvendt funksjon med hele tallinjen som definisjonsområde. (Det skal vel ikke stor fantasi til for å se hvilken funksjon *det* er.)

Noen av egenskapene nevnt over er lette å vise, andre er litt mer arbeid. Her er hovedideene til bevis, med mer eller mindre detaljer. Fyll ut detaljene selv, og pass på at du er overbevist om at det som står her er riktig!

1. Hva er integralet fra 1 til 1?

2. Følger fra analysens fundamentalsetning.

3. $$\ln xy = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \ln x + \int_1^{y} \frac{1}{u}\,du = \ln x + \ln y.$$

   I den tredje likheten har vi brukt substitusjonen $u = t/x$. Husk å sjekke detaljene i utregningen. Ser du hvorfor vi har brukt denne substitusjonen? Ser du hvorfor vi delte opp integralet slik vi gjorde i den første likheten?

4. Følger fra punkt 2. og at x er positiv.

5. Påstanden er sann for $n = 1$: $\ln a^1 = 1 \cdot \ln a$. Anta at påstanden er sann for et heltall $k : \ln(a^k) = k \ln a$. Da følger det at $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \cdot a) = \ln(a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a = (k+1) \ln a$. Ved induksjonsprinsippet følger det dermed at påstanden er sann for alle heltall.

6. Dette betyr at for ethvert (stort) tall M finnes det et tall m slik at $\ln x > M$ når $x > m$. Sett inn $a = 2$ i punktet over. $\ln 1 = 0$, og ln er strengt voksende, så $\ln 2 > 0$. Hvis M er gitt kan vi derfor finne et tall n som er slik at $\ln 2^n = n \ln 2 > M$. Fordi ln er strengt voksende har vi at $\ln x > \ln 2^n > M$, som var det vi trengte vise.

7. Bruk $0 = \ln 1 = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$.

8. Bruk de to foregående punktene.

9. La oss først vise at det finnes minst ett slikt tall: Vi vet at $\ln x$ er en kontinuerlig funksjon (hvorfor)? Punkt 6 garanterer at det finnes et tall α med $\ln\alpha < u$, mens punkt 8 garanterer at det finnes et annet tall β med $\ln\beta > u$. Bruk nå skjæringssetningen for å konkludere at det finnes et tall y mellom α og β slik at $\ln y = u$.

   At det ikke finnes flere y som gjør samme jobb følger av at ln er en strengt voksende funksjon.

Da har vi fått sagt litt om denne «nye» funksjonen vår, ln.

4 Tilbake til eksponentialfunksjonen

Vi har gitt en abstrakt definisjon av hva en eksponentialfunksjon skal være for noe, vi har funnet at en deriverbar eksponentialfunksjon, om den finnes, har en omvendt funksjon som kan skrives som et bestemt integral, og vi har plukket ut en bestemt versjon av dette integralet og kalt resultatet ln. Neste post på programmet vil være å finne den omvendte til ln, som *burde* bli en eksponentialfunksjon, og å vise at dette virkelig er slik.

Vi gir denne et navn, nemlig exp. (Denne eksponentialfunksjonen er så spesiell og viktig at vi kaller den bare eksponentialfunksjon*en*, som om det ikke finnes flere eksponentialfunksjoner.) Legg merke til at så langt er exp bare et navn! Fordi bildet til ln er hele tallinjen har vi at definisjonsmengden til exp er $D_{\exp} = \mathbb{R}$ og bildet er $V_{\exp} = \mathbb{R}_+$.

Setning 9. *Funksjonen* exp *er virkelig en eksponentialfunksjon. Den oppfyller*

$$\frac{d}{du}(\exp u) = \exp u.$$

Bevis. Fordi ln er en kontinuerlig funksjon med en positiv derivert (aldri null), vil den omvendte funksjonen exp være kontinuerlig og deriverbar.

Egenskapene 1 og 3 i Setning 7 gir nå henholdsvis $\exp(0) = 1$ og $\exp(u + v) = \exp(u)\exp(v)$, så betingelsene i Definisjon 1 er oppfylt. Derivasjonsegenskapen følger direkte fra egenskap 2 i Setning 7 (du bør selv sjekke detaljene). ☐

5 Generelle eksponentialfunksjoner og logaritmer

Vi vender nå tilbake til problemet å konstruere a^u for generelle $a \in \mathbb{R}_+$ og $u \in \mathbb{R}$. Vi minner om egenskap 5 for eksponentialfunksjoner (side 3), her skrevet for eksponentialfunksjonen exp:

$$\exp(ru) = \exp(u)^r \qquad \text{for } u \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}.$$

Hvis vi nå setter inn $u = \ln(a)$ slik at $\exp(u) = a$, så har vi

$$\exp(r\ln(a)) = a^r \qquad \text{for } a \in \mathbb{R}_+,\ r \in \mathbb{Q}.$$

Her er venstresiden en kontinuerlig funksjon av r, og det virker derfor naturlig å *definere*

$$a^u = \exp(u \ln a) \qquad \text{for } a \in \mathbb{R}_+,\ u \in \mathbb{Q}. \tag{8}$$

Du kan nå verifisere at $g(u) = a^u$ er en eksponentialfunksjon med grunntall a, og som vi har sett finnes høyst én slik. Nå vet vi omsider at det virkelig finnes en.

Vi er spesielt interessert i tallet e som er gitt ved at $\ln e = 1$, det vil si $e = \exp 1$. Med andre ord, e er grunntallet for eksponentialfunksjonen exp. Setter vi inn $a = e$ i (8) får vi

$$e^u = \exp u.$$

Det gjenstår nå bare å identifisere logaritmen med grunntall a. Vi skriver $\log_a$ for den omvendte funksjonen til a^u. Så om vi har $u = \log_a x$ skal vi ha $x = a^u$, men så gir (8) $x = \exp(u \ln a)$, og tar vi ln på begge sider får vi $\ln x = u \ln a$. Altså må

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

6 Egenskaper ved generelle logaritmer og eksponentialfunksjoner

Vi er ferdige med det vi har satt oss som mål, nemlig å gi en stringent konstruksjon for eksponentialfunksjoner og logaritmer. Avslutningsvis kan vi bruke definisjonene og det vi allerede har gjort for å finne ut en del om disse funksjonene. Her er noe av det:

Setning 10. *Egenskaper ved* $\log_a x$ *og* a^x :

1. $\dfrac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x$.
2. $\dfrac{d}{dx} \log_a x = \dfrac{1}{(\ln a) x}$.
3. a^x *er en voksende funksjon hvis* $a > 1$, *og en avtagende funksjon hvis* $0 < a < 1$.
4. $\log_a x$ *er en voksende funksjon hvis* $a > 1$, *og en avtagende funksjon hvis* $0 < a < 1$.
5. $\log_a x$ *og* a^x *er omvendte funksjoner (forutsatt at* $a \neq 1$*).*
6. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
7. $a^{x+y} = a^x a^y$.
8. $\ln a^x = x \ln a$.
9. $\log_b a^x = x \log_b a$.
10. $(ab)^x = a^x b^x$.
11. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.

Vis dette selv!

Merknad 11. Hva skal a^{b^c} bety? Vi har hvertfall to muligheter

$$a^{(b^c)} \qquad \text{og} \qquad (a^b)^c.$$

Det er fristende å tro at det er det samme, men det er det ikke. Tenk på hva notasjonen betyr. Du kan kanskje bruke $a = b = c = 3$ for å hjelpe deg. I det ene tilfellet får du 3^9 og i det andre tilfellet får du 3^{27}. (Hvilken gir deg hvilken?) Hvis vi noen gang skal skrive a^{b^c} må vi derfor bli enige om hva det skal bety. La oss være enige om å bruke den venstre tolkningen, altså

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$$

Hvordan vil du nå tolke

$$a^{b^{c^d}}?$$

7 Oppgaver

Oppgave 1: Kan vi lage oss «logaritmefunksjoner» definert på hele tallinjen, i motsetning til bare på de positive reelle tallene? Vis at svaret er «nei». Mer spesifikt, vis at hvis f er en funksjon som har hele tallinja som definisjonsmengde, $D_f = \mathbb{R}$, og tilfredsstiller $f(xy) = f(x) + f(y)$, så må f være konstant lik null.

Oppgave 2: Vis at hvis g er en funksjon som har hele tallinja som definisjonsmengde, $D_g = \mathbb{R}$, og tilfredsstiller $g(u + v) = g(u)f(v)$, så må enten $g(0) = 1$ eller så må g være konstant lik null.

Oppgave 3: Vis at dersom g_1 og g_2 er to kontinuerlige funksjoner som har hele tallinja som definisjonsmengde og som har samme funksjonsverdi for alle *rasjonale* tall, så er de samme funksjon (det vil si de har samme funksjonsverdi overalt).

Oppgave 4: Vis alle egenskapene i setning 10.

8 Etterord

Vi har nå gitt en grundig og fornuftig definisjon av hva det burde si å ta potenser av positive tall. Vi gjorde det ikke ved å angripe spørsmålet direkte. I stedet snek oss inn bakveien, men passet på at vi tok vare på det som var viktig. Det viste seg at det resultatet vi fikk var bra. Det er viktig å merke seg at dette ikke er den eneste måten vi kunne gjort dette på.

Vi kunne for eksempel definert $g(u) = e^u$ mer direkte ved å si at det er den eneste funksjonen som har $g(u) = g'(u)$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og som har $g(0) = 1$. Da måtte vi vist at det finnes en slik funksjon, for eksempel ved å utvikle og så benytte en generell teori om eksistens og entydighet av løsninger til differensialligninger med gitte initialbetingelser. (Men det er *nesten* det vi har gjort, bare at vi på sett og vis har benyttet den mindre generelle, men mer eksplisitte, teorien for *separable* differensialligninger.) Hadde vi valgt den veien ville vi definert $\ln x$ som den omvendte funksjonen til e^x. Denne angrepsmåten virker kanskje mer fristende, men vi er ikke så sikker på om den hadde blitt noe lettere, kanskje heller det motsatte.

Vi har brukt ganske mye tid på noe som kanskje kan virke som en liten ting, men samtidig har vi fått brukt og repetert ganske mye god matematikk og fått mye god trening. Når du har arbeidet deg ordentlig gjennom dette et par ganger synes du dessuten kanskje at det ikke lenger var «bare en liten ting»? Det som uansett er sikkert er at du kan være litt stolt av deg selv når du forstår alt som står her, og er i stand til å fylle ut alt vi har overlatt til deg. Og selv om vi har laget oss en abstrakt og vakker definisjon, ikke glem hvor den kommer fra. Husker du det som står i den første delen, så greier du også å bruke dette til noe. . . .

Senere, når vi har lært teorien for potensrekker, kunne vi gått rett på sak og definert eksponentialfunksjonen som summen av rekken

$$\exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!},$$

og utledet alle de ønskede egenskapene derfra.

Vi kunne til og med ha benyttet grensen

$$\exp u = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{u}{n}\Big)^n$$

som definisjon. Man støter av og til på dette i eldre litteratur, men det er vanskelig å vise at grensen eksisterer og har de egenskapene man ønsker. Det er mye lettere å vise likheten *etter* at man definert eksponentialfunksjonen og utledet dens egenskaper.

Enda en annen angrepsmåte er følgende: Start slik vi gjorde, med å definere hva det vil si å opphøye et tall i en rasjonal potens, $a^{m/n}$. Definer a^x for alle x ved å «fylle inn» hullene mellom alle de rasjonale tallene. Du kan jo tenke på hvordan du ville gjøre dette, og når du har gjort det må du vise at den funksjonen du har fått har alle de egenskapene den skal ha. (Når du virkelig forstår det vi har gjort her vil du se at det på mange måter er det vi har gjort. Men vi har fylt inn hullene ved å gå via logaritmen og tilbake, ikke først gjøre oss helt ferdige med potenser og deretter snakke om logaritmer.) Det finnes flere (sikkert mange) måter å gjøre dette, men det får de spesielt interesserte finne ut av selv. Start med en tur på biblioteket.

Noen fremstillinger starter med definisjonen

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

som lyn fra klar himmel, og så utledes alt derfra. Dette er matematisk sett korrekt nok, og selvfølgelig uhyre effektivt, men det gir svært lite *innsikt.* Her har vi nærmest gått til den motsatte ytterligheten. I blant bør man unne seg den luksus å lære noe spesielt grundig og forstå det helt til bunns.

Vi kunne ha brukt lignende metoder for å definere de trigonometriske funksjonene. For eksempel er funksjonene $f(t) = \cos t$ og $g(t) = \sin t$ entydig gitt ved at de oppfyller

$$\begin{aligned} f'(t) &= -g(t), & f(0) &= 1,\\ g'(t) &= f(t), & g(0) &= 0. \end{aligned}$$

Men dette er litt mer krevende, så vi står over for denne gang.

9 Tillegg

Her er noen begreper vi har brukt som det kan være nyttig at du er sikker på:

- Funksjoner
- Omvendte funksjoner (kalles også ofte inverse funksjoner)
- Kontinuerlige funksjoner
- Derivasjon
- Integrasjon (og da tenker vi på det bestemte integralet)

Setning 12 (Skjæringssetningen)**.** *La $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ være en kontinuerlig funksjon, og d et tall mellom $f(a)$ og $f(b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at*

$$f(c) = d.$$

Setning 13 (Sekantsetningen)**.** *La $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Anta at f er deriverbar på (a, b). Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tegn et bilde til hver av de to setningene, så både forstår og husker du hva de sier!

Slik vi har definert begrepene er det absolutt en stor forskjell på *antiderivasjon* og *bestemte integral.* Tenk litt over hva som er innholdet i de to begrepene før du leser følgende setning, som sier at de likevel har mye med hverandre å gjøre. Det er kanskje den veldig tette sammenhengen som denne setningen gir som gjør det så vanskelig å skille de to begrepene? (Og kanskje det faktum at vi bruker integraltegnet for begge deler, og til og med kaller den antideriverte for et ubestemt integral.)

Setning 14 (Analysens fundamentalsetning)**.** *Anta at $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ er en kontinuerlig funksjon.*

DEL I: *Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a, x]$, der $a \leq x \leq b$.*
I tillegg har vi at funksjonen $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ er kontinuerlig på $[a, b]$ og $F'(x) = f(x)$ for alle x i (a, b).

DEL II: *Anta at G er en antiderivert til f.*
Da er $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Legg merke til at det del I sier er at vi har *laget* en funksjon som er en *antiderivert* til den gitte funksjonen f.