MA1102 våren 2009
øving 5

Oppgaver fra boka: Disse og oppgaven nedenfor skal leveres. I tillegg anbefaler jeg deg å gjøre noen av de frivillige nettoppgavene.

9.4: 23, 27

9.5: 1, 8, 12, 13, 15, 21, 27

9.6: 1, 15, 37

Oppgave: Dette er stort sett siste oppgave på eksamen i fjor, men delt opp i mindre biter.

Vi vil se på funksjonsfølgen $\{f_n\}$ der $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$.

a) Er funksjonene f_n kontinuerlige på $I = [0, 1]$?

b) Vis at på $[0, 1]$ så konvergerer funksjonsfølgen punktvis mot funksjonen $f(x) = 0$. (Dette er enklere enn det ser ut på overflaten. Vanskeligheten består mest i å se hva som skal gjøres.)

c) Deriver funksjonene i følgen

d) Hver funksjon f_n har ett maksimumpunkt (a_n, b_n) på $I = [0, 1]$. Finn dette. (M.a.o. finn a_n og b_n, der a_n er den x verdien som gir maksimum for f_n og $b_n = f(a_n)$.)

e) Undersøk om funksjonsfølgen konvergerer uniformt mot $f = 0$ på $[0, 1]$.

f) Finn $d_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. Finn deretter $d = \lim_{n\to\infty} d_n$. Sammenlign dette med at $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Kommenter det du finner i forhold til hva vi vet om integraler og uniform konvergens.

Utfordring: Dette var siste oppgave på finalen i årets Abelkonkurranse. Den var relativt vanskelig, men burde nok falle litt lettere for dere enn for dem, fordi mange av ideene vi har snakket om i kapittel 9 er relevante. (Men jeg tror ikke oppgaven er trivill for dere heller.) Hvis du ikke får til a) oppgaven kan du fremdeles bruke den på b) oppgaven.

a) Vis at $\left(\dfrac{2010}{2009}\right)^{2009} > 2$.

b) La $x = 1 - 2^{-2009}$. Vis at $x + x^2 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{2^m} < 2010$ for alle positive heltall m.