$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots$ en tallfølge,
dvs at leddene a_n er tall

Grenser

Si at følgen har grense L (et tall) hvis

- for ethvert tall $\epsilon > 0$
- finnes det et tall N
- slik at når $n > N$
- så har vi $|a_n - L| < \epsilon$

(Vi kan garantere at leddene i følgen er så nærme L vi vil, bare vi er langt nok ute i følgen.)
Vi skriver $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

Konvergens/divergens

Vi sier at hvis følgen har en grense, så konvergerer den, hvis ikke sier vi at den divergerer.

"Voksende følge med tak"

Hvis $\{a_n\}$ er en tallfølge som

- er (etter en stund) økende og
- har en øvre skranke

så konvergerer følgen,
og grensen er lik den minste øvre skranken.

"Vi kan bruke det vi vet om funksjoner"

Vi har en følge

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Hvis vi også har en funksjon f slik at

- $a_n = f(n)$ og
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

så har vi at

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

"Voksende følge med tak"

Hvis $\{a_n\}$ er en tallfølge som

- er (etter en stund) økende og
- har en øvre skranke

så konvergerer følgen,
og grensen er lik den minste øvre skranken.

"Vi kan bruke det vi vet om funksjoner"

Vi har en følge

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Hvis vi også har en funksjon f slik at

- $a_n = f(n)$ og
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

så har vi at

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

a) $\left\{ \dfrac{n^2 - 1}{n^2} \right\}$

b) $\left\{ \dfrac{5 - 2n}{3n - 7} \right\}$

c) $\left\{ \sqrt{2n - 1} - \sqrt{2n} \right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x| < 1$.

e) $\left\{ \dfrac{x^n}{n!} \right\}$

f) $\left\{ \dfrac{\sin n}{n} \right\}$

g) $\left\{ \dfrac{\ln n}{n} \right\}$

h) $\left\{ n^{1/n} \right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = (a_n + 4)/2$ når $n \geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n = F_{n+1}/F_n$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

a) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{5-2n}{3n-7}\right\}$

c) $\left\{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}\right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x|<1$.

e) $\left\{\dfrac{x^n}{n!}\right\}$

f) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$

g) $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

h) $\left\{n^{1/n}\right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1=2$ og $a_{n+1}=(a_n+4)/2$ når $n\geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n=F_{n+1}/F_n,\ F_1=1,\ F_2=1$ og $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

a) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{5-2n}{3n-7}\right\}$

c) $\left\{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}\right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x|<1$.

e) $\left\{\dfrac{x^n}{n!}\right\}$

f) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$

g) $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

h) $\left\{n^{1/n}\right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1=2$ og $a_{n+1}=(a_n+4)/2$ når $n\geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n=F_{n+1}/F_n$, $F_1=1$, $F_2=1$ og $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

a) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{5-2n}{3n-7}\right\}$

c) $\left\{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}\right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x|<1$.

e) $\left\{\dfrac{x^n}{n!}\right\}$

f) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$

g) $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

h) $\left\{n^{1/n}\right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1=2$ og $a_{n+1}=(a_n+4)/2$ når $n\geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n=F_{n+1}/F_n,\ F_1=1,\ F_2=1$ og $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

a) $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}$

b) $\left\{\frac{5-2n}{3n-7}\right\}$

c) $\left\{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}\right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x|<1$.

e) $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$

f) $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

g) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$

h) $\left\{n^{1/n}\right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1=2$ og $a_{n+1}=(a_n+4)/2$ når $n\geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n=F_{n+1}/F_n,\ F_1=1,\ F_2=1$ og $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

a) $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}$

b) $\left\{\frac{5-2n}{3n-7}\right\}$

c) $\left\{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}\right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x|<1$.

e) $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$

f) $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

g) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$

h) $\left\{n^{1/n}\right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = (a_n+4)/2$ når $n \geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n = F_{n+1}/F_n$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

a) $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}$

b) $\left\{\frac{5-2n}{3n-7}\right\}$

c) $\left\{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}\right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x|<1$.

e) $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$

f) $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

g) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$

h) $\left\{n^{1/n}\right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1=2$ og $a_{n+1}=(a_n+4)/2$ når $n\geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n=F_{n+1}/F_n$, $F_1=1$, $F_2=1$ og $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

a) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{5-2n}{3n-7}\right\}$

c) $\left\{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}\right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x|<1$.

e) $\left\{\dfrac{x^n}{n!}\right\}$

f) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$

g) $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

h) $\left\{n^{1/n}\right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1=2$ og $a_{n+1}=(a_n+4)/2$ når $n\geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n=F_{n+1}/F_n,\ F_1=1,\ F_2=1$ og $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

a) $\left\{ \frac{n^2-1}{n^2} \right\}$

b) $\left\{ \frac{5-2n}{3n-7} \right\}$

c) $\left\{ \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n} \right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x| < 1$.

e) $\left\{ \frac{x^n}{n!} \right\}$

f) $\left\{ \frac{\sin n}{n} \right\}$

g) $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$

h) $\left\{ n^{1/n} \right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = (a_n + 4)/2$ når $n \geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n = F_{n+1}/F_n$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

a) $\left\{ \dfrac{n^2 - 1}{n^2} \right\}$

b) $\left\{ \dfrac{5 - 2n}{3n - 7} \right\}$

c) $\left\{ \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n} \right\}$

d) $\{x^n\}$ der x er et tall slik at $|x| < 1$.

e) $\left\{ \dfrac{x^n}{n!} \right\}$

f) $\left\{ \dfrac{\sin n}{n} \right\}$

g) $\left\{ \dfrac{\ln n}{n} \right\}$

h) $\left\{ n^{1/n} \right\}$

i) $\{a_n\}$ der $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = (a_n + 4)/2$ når $n \geq 1$

j) $\{\tau_n\}$ der $\tau_n = F_{n+1}/F_n,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Endelige summer

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Rekker ("Formelle uendelige summer")

En *rekke* er en *formell sum* av uendelig mange ledd (med start, uten stopp)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n kalles leddene til rekken

Endelige summer

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Rekker ("Formelle uendelige summer")

En *rekke* er en *formell sum* av uendelig mange ledd (med start, uten stopp)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n kalles leddene til rekken

Rekken:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Følgen av leddene til rekken:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots = \{a_n\}$$

Følgen av delsummer:

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots = \{s_n\}$$

der

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Rekken:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Følgen av leddene til rekken:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots = \{a_n\}$$

Følgen av delsummer:

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots = \{s_n\}$$

der

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Rekken:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Følgen av leddene til rekken:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots = \{a_n\}$$

Følgen av delsummer:

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots = \{s_n\}$$

der

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hvilken mening skal vi legge til en rekke, utover å være en formell sum?

Konvergens av rekker der leddene er tall

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en rekke der a_n er tall

Si at rekken *konvergerer mot summen s* hvis følgen av delsummer konvergerer mot s.

Det vil si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

Skriv

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Hvilken mening skal vi legge til en rekke, utover å være en formell sum?

Konvergens av rekker der leddene er tall

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en rekke der a_n er tall

Si at rekken *konvergerer mot summen s* hvis følgen av delsummer konvergerer mot s.

Det vil si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

Skriv

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Hvilken mening skal vi legge til en rekke, utover å være en formell sum?

Konvergens av rekker der leddene er tall

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en rekke der a_n er tall

Si at rekken *konvergerer mot summen s* hvis følgen av delsummer konvergerer mot s.

Det vil si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

Skriv

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Hvilken mening skal vi legge til en rekke, utover å være en formell sum?

Konvergens av rekker der leddene er tall

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en rekke der a_n er tall

Si at rekken *konvergerer mot summen* s hvis følgen av delsummer konvergerer mot s.

Det vil si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

Skriv

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Setning

Hvis rekken $\sum a_n$ konvergerer
Så konvergerer følgen av leddene $\{a_n\}$,
og den konvergerer mot null

Det motsatte gjelder ikke !

Det er ikke gitt at en rekke konvergerer selv om følgen av leddene konvergerer mot null.

Eksempel

- Følgen $\{1/n\}$ konvergerer mot null
- Rekken $\sum 1/n$ divergerer (mot uendelig)

Setning

Hvis rekken $\sum a_n$ konvergerer
Så konvergerer følgen av leddene $\{a_n\}$,
og den konvergerer mot null

Det motsatte gjelder ikke !

Det er ikke gitt at en rekke konvergerer selv om følgen av leddene konvergerer mot null.

Eksempel

- Følgen $\{1/n\}$ konvergerer mot null
- Rekken $\sum 1/n$ divergerer (mot uendelig)

Setning

Hvis rekken $\sum a_n$ konvergerer
Så konvergerer følgen av leddene $\{a_n\}$,
og den konvergerer mot null

Det motsatte gjelder ikke !

Det er ikke gitt at en rekke konvergerer selv om følgen av leddene konvergerer mot null.

Eksempel

- Følgen $\{1/n\}$ konvergerer mot null
- Rekken $\sum 1/n$ divergerer (mot uendelig)

Setning

Hvis rekken $\sum a_n$ konvergerer
Så konvergerer følgen av leddene $\{a_n\}$,
og den konvergerer mot null

Det motsatte gjelder ikke !

Det er ikke gitt at en rekke konvergerer selv om følgen av leddene konvergerer mot null.

Eksempel

- Følgen $\{1/n\}$ konvergerer mot null
- Rekken $\sum 1/n$ divergerer (mot uendelig)

Setning

Hvis rekken $\sum a_n$ konvergerer
Så konvergerer følgen av leddene $\{a_n\}$,
og den konvergerer mot null

Det motsatte gjelder ikke !

Det er ikke gitt at en rekke konvergerer selv om følgen av leddene konvergerer mot null.

Eksempel

- Følgen $\{1/n\}$ konvergerer mot null
- Rekken $\sum 1/n$ divergerer (mot uendelig)