Taylorpolynom (4.8)

f en funksjon
a et punkt i definisjonsmengden til f
f (minst) n ganger deriverbar i a
Da er Taylorpolynomet til f om a

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k
\end{aligned}
$$

Taylorpolynom (4.8)

f en funksjon
a et punkt i definisjonsmengden til f
f (minst) n ganger deriverbar i a
Da er Taylorpolynomet til f om a

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Feilledd/Restledd $E_n(x)$

$$\begin{aligned} E_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \end{aligned}$$

Taylors setning

Gitt en funksjon f og et punkt a i definisjonsmengden til f
Gitt et punkt x i definisjonsmengden
Gitt et intervall I som inneholder a og x
Anta at f er $n+1$ ganger deriverbar på I
Da har vi at det finnes et punkt s mellom x og a slik at

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Taylors setning

Gitt en funksjon f og et punkt a i definisjonsmengden til f
Gitt et punkt x i definisjonsmengden
Gitt et intervall I som inneholder a og x
Anta at f er $n+1$ ganger deriverbar på I
Da har vi at det finnes et punkt s mellom x og a slik at

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$n = 0$ — Sekantsetningen

$$f(x) = f(a) + f'(s)(x-a) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(s)$$

Taylors setning

Gitt en funksjon f og et punkt a i definisjonsmengden til f
Gitt et punkt x i definisjonsmengden
Gitt et intervall I som inneholder a og x
Anta at f er $n+1$ ganger deriverbar på I
Da har vi at det finnes et punkt s mellom x og a slik at

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$n = 0$ — Sekantsetningen

$$f(x) = f(a) + f'(s)(x-a) \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(s)$$

$n = 1$ — Linearisering med restledd

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2 = L(x) + E(x)$$

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Verktøy:

Utvidet sekantsetning

f og g kontinuerlige på $[\alpha, \beta]$ og deriverbare på (α, β).
Da finnes det et tall $\gamma \in [\alpha, \beta]$ slik at

$$\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}.$$

Eksempler

1. La $P_4(x)$ være fjerdegrads Taylorpolynom til $f(x) = e^x$ om $x = 0$. Hvor god tilnærming til e er $P(1)$?

Eksempler

1. La $P_4(x)$ være fjerdegrads Taylorpolynom til $f(x) = e^x$ om $x = 0$. Hvor god tilnærming til e er $P(1)$?
2. Finn de to første desimalene i $\sin(1)$

Eksempler

1. La $P_4(x)$ være fjerdegrads Taylorpolynom til $f(x) = e^x$ om $x = 0$. Hvor god tilnærming til e er $P(1)$?
2. Finn de to første desimalene i $\sin(1)$
3. Finn et Taylorpolynom som gir et estimat for $\sin(1)$ med feil mindre enn $0,000001$.

Eksempler

1. La $P_4(x)$ være fjerdegrads Taylorpolynom til $f(x) = e^x$ om $x = 0$. Hvor god tilnærming til e er $P(1)$?
2. Finn de to første desimalene i $\sin(1)$
3. Finn et Taylorpolynom som gir et estimat for $\sin(1)$ med feil mindre enn $0,000001$.
4. La $P_7(x)$ være syvendegrads Taylorpolynom til $f(x) = \sin x$ om $x = 0$. For hvor stort område er differeansen mellom f og P_7 mindre enn $0,01$?

Sammenligning av funksjoner

- Gitt to funksjoner f og u
- Gitt et punkt a der vi vil sammenligne
- Skriv: $f(x) = O(u(x))$ når $x \to a$
- Si: $f(x)$ er store-O av $u(x)$ når x går mot a
- Men: Det finnes et intervall I som inneholder a og en konstant K slik at når $x \in I$ så har vi

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

Sammenligning av funksjoner

- Gitt to funksjoner f og u
- Gitt et punkt a der vi vil sammenligne
- Skriv: $f(x) = O(u(x))$ når $x \to a$
- Si: $f(x)$ er store-O av $u(x)$ når x går mot a
- Men: Det finnes et intervall I som inneholder a og en konstant K slik at når $x \in I$ så har vi

$$|f(x)| \leq K|u(x)|$$

- Skriv: $f(x) = g(x) + O(u(x))$ når $x \to a$
- Men: $f(x) - g(x) = O(u(x))$ når $x \to a$
- Sier noe om: hvor like f og g er i nærheten av a

Setning

- Q_n et polynom med grad *høyst* n
- Anta $f(x) = Q_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ når $x \to a$.
- Da er Q_n Taylorpolynomet av grad n til f om a

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp.
Elementene kalles ledd

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp. Elementene kalles ledd

Eksempler

1. $1, \; 1 + x, \; 1 + x + x^2/2, \; 1 + x + x^2/2 + x^3/6, \ldots$

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp. Elementene kalles ledd

Eksempler

1. $1, \; 1 + x, \; 1 + x + x^2/2, \; 1 + x + x^2/2 + x^3/6, \ldots$
2. $1, \; x, \; x^2/2, \; x^3/6, \; x^4/24, \; x^5/120, \ldots$

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp.
Elementene kalles ledd

Eksempler

1. $1, \; 1+x, \; 1+x+x^2/2, \; 1+x+x^2/2+x^3/6, \ldots$
2. $1, \; x, \; x^2/2, \; x^3/6, \; x^4/24, \; x^5/120, \ldots$
3. $1, \; 1, \; 1/2, \; 1/6, \; 1/24, \; 1/120, \; 1/720, \; 1/5040, \; 1/40320, \ldots$

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp. Elementene kalles ledd

Eksempler

3. $1,\ 1,\ 1/2,\ 1/6,\ 1/24,\ 1/120,\ 1/720,\ 1/5040,\ 1/40320, \ldots$
4. $\sin(x),\ \sin(2x),\ \sin(3x),\ \sin(4x),\ \sin(5x),\ \sin(6x),\ \ldots$

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp.
Elementene kalles ledd

Eksempler

3. $1,\ 1,\ 1/2,\ 1/6,\ 1/24,\ 1/120,\ 1/720,\ 1/5040,\ 1/40320, \ldots$

5. $3,\ 1,\ 45,\ -33,\ 0,\ 0, 3, -8234234238732545 2, 1, 33, 27, 17, \ldots$

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp.
Elementene kalles ledd

Eksempler

3. $1,\ 1,\ 1/2,\ 1/6,\ 1/24,\ 1/120,\ 1/720,\ 1/5040,\ 1/40320, \ldots$

5. $3,\ 1,\ 45,\ -33,\ 0,\ 0,3, -8234234238732545 2, 1, 33, 27, 17, \ldots$
6. $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots$

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp. Elementene kalles ledd

Eksempler

3. $1, \; 1, \; 1/2, \; 1/6, \; 1/24, \; 1/120, \; 1/720, \; 1/5040, \; 1/40320, \ldots$

5. $3, \; 1, \; 45, \; -33, \; 0, \; 0,3, -8234234238732545 2, 1, 33, 27, 17, \ldots$
6. $a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; a_5, \ldots$
7. $1, \; 1, \; 2, \; 3, \; 5, \; 8, \; 13, \; 21, \; 34, \; 55, \; 89, \; 144, \; 233, \ldots$

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp.
Elementene kalles ledd

Eksempler

3. $1,\ 1,\ 1/2,\ 1/6,\ 1/24,\ 1/120,\ 1/720,\ 1/5040,\ 1/40320, \ldots$

5. $3,\ 1,\ 45,\ -33,\ 0,\ 0, 3, -8234234238732545 2, 1, 33, 27, 17, \ldots$
6. $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots$
7. $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233, \ldots$
8. $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$

Følger (9.1)

En følge er en liste elementer med start, men uten stopp. Elementene kalles ledd

Eksempler

3. $1,\ 1,\ 1/2,\ 1/6,\ 1/24,\ 1/120,\ 1/720,\ 1/5040,\ 1/40320, \ldots$

5. $3,\ 1,\ 45,\ -33,\ 0,\ 0,3, -82342342387325452, 1, 33, 27, 17, \ldots$
6. $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots$
7. $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233, \ldots$
8. $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$
9. $-3,\ -1,\ 0,\ 1/2,\ 3/4,\ 7/8,\ 15/16,\ 31/32,\ 63/64, \ldots$

$\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ en tallfølge (dvs at leddene i følgen er tall. Si at følgen

- har en *øvre skranke* (et tak) hvis det finnes et tall M slik at $a_n \leq M$ for alle n
- har en *nedre skranke* (et gulv) hvis det finnes et tall L slik at $a_n \geq L$ for alle n
- er *begrenset* hvis den har både en øvre og en nedre skranke
- er *positiv* hvis null er en nedre skranke
- er *negativ* hvis null er en øvre skranke
- er *økende/voksende* hvis $a_n \leq a_{n+1}$ for alle n
- er *avtagende/synkende* hvis $a_n \geq a_{n+1}$ for alle n
- er *monoton* hvis enten voksende eller avtagende
- er *alternerende* hvis $a_n a_{n+1} < 0$ for alle n

Konvergens av tallfølger

$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots$ en tallfølge,
dvs at leddene a_n er tall

Grenser

Si at følgen konvergerer mot L (et tall) hvis

- for ethvert tall $\epsilon > 0$
- finnes det et tall N
- slik at når $n > N$
- så har vi $|a_n - L| < \epsilon$

Konvergens av tallfølger

$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots$ en tallfølge,
dvs at leddene a_n er tall

Grenser

Si at følgen konvergerer mot L (et tall) hvis

- for ethvert tall $\epsilon > 0$
- finnes det et tall N
- slik at når $n > N$
- så har vi $|a_n - L| < \epsilon$

(Vi kan garantere at leddene i følgen er så nærme L vi vil, bare vi er langt nok ute i følgen.)

Konvergens av tallfølger

$a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots$ en tallfølge,
dvs at leddene a_n er tall

Grenser

Si at følgen konvergerer mot L (et tall) hvis

- for ethvert tall $\epsilon > 0$
- finnes det et tall N
- slik at når $n > N$
- så har vi $|a_n - L| < \epsilon$

(Vi kan garantere at leddene i følgen er så nærme L vi vil, bare vi er langt nok ute i følgen.)
Vi skriver $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

Konvergens av tallfølger

$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ en tallfølge,
dvs at leddene a_n er tall

Grenser

Si at følgen konvergerer mot L (et tall) hvis

- for ethvert tall $\epsilon > 0$
- finnes det et tall N
- slik at når $n > N$
- så har vi $|a_n - L| < \epsilon$

(Vi kan garantere at leddene i følgen er så nærme L vi vil, bare vi er langt nok ute i følgen.)
Vi skriver $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

Konvergens/divergens

Vi sier at hvis følgen har en grense, så konvergerer den, hvis ikke sier vi at den divergerer.

Hvis ikke dette er den viktigste setningen i kapittel 9, så er det hvertfall den du kommer til å bruke oftest

Hvis ikke dette er den viktigste setningen i kapittel 9, så er det hvertfall den du kommer til å bruke oftest

Setning

Hvis $\{a_n\}$ er en tallfølge som

- er (etter en stund) økende og
- har en øvre skranke

så konvergerer følgen,
og grensen er lik den minste øvre skranken.

Hvis ikke dette er den viktigste setningen i kapittel 9, så er det hvertfall den du kommer til å bruke oftest

Setning

Hvis $\{a_n\}$ er en tallfølge som

- er (etter en stund) økende og
- har en øvre skranke

så konvergerer følgen,
og grensen er lik den minste øvre skranken.

Følgesetning

Tilsvarende for avtakende følge med nedre skranke (grensen er lik den øvre nedre skranken)

Hvis ikke dette er den viktigste setningen i kapittel 9, så er det hvertfall den du kommer til å bruke oftest

Setning

Hvis $\{a_n\}$ er en tallfølge som

- er (etter en stund) økende og
- har en øvre skranke

så konvergerer følgen,
og grensen er lik den minste øvre skranken.

Følgesetning

Tilsvarende for avtakende følge med nedre skranke (grensen er lik den øvre nedre skranken)

Følgesetning

Monotone begrensede følger er konvergente.