Plan

I dag

- Referansegruppe. . .
- Ta opp igjen kurvelengde
- Areal bestemt av en kurve
- En annen måte å beskrive punkt i planet
- Kurver med denne beskrivelsen
- Tangenter, kurvelengde og areal

Neste uke

- Kjeglesnitt
- dvs 8.1 og en del av 8.2–8.6
- Se gjerne litt på Keplers lover (11.6 eller notat) når dere er ferdige med dette.

Sist:

Kurvelengde (8.4)

- Del opp i biter

Sist:

Kurvelengde (8.4)

- Del opp i biter
- $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

Sist:

Kurvelengde (8.4)

- Del opp i biter
- $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$
- $s = \int_{t=a}^{t=b} ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

Sist:

Kurvelengde (8.4)

- Del opp i biter
- $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$
- $s = \int_{t=a}^{t=b} ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$

Sist:

Kurvelengde (8.4)

- Del opp i biter
- $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$
- $s = \int_{t=a}^{t=b} ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$

Eksempelet vårt

$$\left.\begin{aligned} x &= t^3 - 3t \\ y &= t^2 \end{aligned}\right\} \quad t \in [-2, 2]$$

Areal

- $f'(t) \geq 0$ går mot høyre
- $f'(t) \leq 0$ går mot venstre
- $g(t) \geq 0$ grafen ligger over x-aksen
- $g(t) \leq 0$ grafen ligger under x-aksen

Areal

- $f'(t) \geq 0$ går mot høyre
- $f'(t) \leq 0$ går mot venstre
- $g(t) \geq 0$ grafen ligger over x-aksen
- $g(t) \leq 0$ grafen ligger under x-aksen

- $g(t)f'(t) \geq 0$ Da er arealet mellom grafen og x-aksen

$$\int_{*}^{**} g(t)f'(t)dt$$

Areal

- $f'(t) \geq 0$ går mot høyre
- $f'(t) \leq 0$ går mot venstre
- $g(t) \geq 0$ grafen ligger over x-aksen
- $g(t) \leq 0$ grafen ligger under x-aksen

- $g(t)f'(t) \geq 0$ Da er arealet mellom grafen og x-aksen

$$\int_{*}^{**} g(t)f'(t)dt$$

- $g(t)f'(t) \leq 0$ Da er

$$\int_{*}^{**} g(t)f'(t)dt$$

det **negative** av arealet mellom kurven og x-aksen

Areal bestemt av kurven

A_1 : Areal mellom x-aksen og de delene av kurven der $gf' \geq 0$.

A_2 : Areal mellom x-aksen og de delene av kurven der $gf' \leq 0$.

Areal bestemt av kurven

A_1 : Areal mellom x-aksen og de delene av kurven der $gf' \geq 0$.

A_2 : Areal mellom x-aksen og de delene av kurven der $gf' \leq 0$.

$$\int_a^b g(t)f'(t)\,dt = A_1 - A_2$$

Areal bestemt av kurven

A_1 : Areal mellom x-aksen og de delene av kurven der $gf' \geq 0$.

A_2 : Areal mellom x-aksen og de delene av kurven der $gf' \leq 0$.

$$\int_a^b g(t)f'(t)\,dt = A_1 - A_2$$

Lukket kurve

Hvis en kurve er

- lukket
- ikke krysser seg selv
- går med klokka

så omslutter den et areal

$$A = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$$

Lukket kurve, som ikke krysser seg selv, med klokka:

$$A = \int_a^b g(t) f'(t)\, dt$$

Lukket kurve, som ikke krysser seg selv, med klokka:

$$A = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$$

Noen utfordringer

- Hva hvis kurven går mot klokka?

Lukket kurve, som ikke krysser seg selv, med klokka:

$$A = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$$

Noen utfordringer

- Hva hvis kurven går mot klokka?
- Hva hvis den krysser seg selv en gang?
- Hva hvis den krysser seg selv flere ganger?

Lukket kurve, som ikke krysser seg selv, med klokka:

$$A = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$$

Noen utfordringer

- Hva hvis kurven går mot klokka?
- Hva hvis den krysser seg selv en gang?
- Hva hvis den krysser seg selv flere ganger?
- Hva hvis den krysser seg selv uendelig mange ganger?

Lukket kurve, som ikke krysser seg selv, med klokka:

$$A = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$$

Noen utfordringer

- Hva hvis kurven går mot klokka?
- Hva hvis den krysser seg selv en gang?
- Hva hvis den krysser seg selv flere ganger?
- Hva hvis den krysser seg selv uendelig mange ganger?
- Hva kan vi gjøre hvis f er kontinuerlig, men bare g er deriverbar? Kan vi da finne arealet innenfor kurven?

Lukket kurve, som ikke krysser seg selv, med klokka:

$$A = \int_a^b g(t)f'(t)\,dt$$

Noen utfordringer

- Hva hvis kurven går mot klokka?
- Hva hvis den krysser seg selv en gang?
- Hva hvis den krysser seg selv flere ganger?
- Hva hvis den krysser seg selv uendelig mange ganger?
- Hva kan vi gjøre hvis f er kontinuerlig, men bare g er deriverbar? Kan vi da finne arealet innenfor kurven?

Eksempelet vårt

$$\left.\begin{aligned} x &= t^3 - 3t \\ y &= t^2 \end{aligned}\right\} \quad t \in [-2, 2]$$

Polarkoordinater

Utgangspunkt

- referansepunkt (origo)
- referanseretning

Polarkoordinater

Utgangspunkt

- referansepunkt (origo)
- referanseretning

Et punkt i planet kan da beskrives ved

- avstand fra referansepunktet
- retning i forhold til referanseretningen (rotasjon)

Oppgaver

Skisser kurvene gitt ved ligningene

- $r = 3$
- $r = 1$
- $\theta = 1$

Oppgaver

Skisser kurvene gitt ved ligningene

- $r = 3$
- $r = 1$
- $\theta = 1$

- Hvordan vil du beskrive $y = x$ i polarkoordinater?
- Skisser $r = \cos\theta$ $(r \geq 0)$

Oppgaver

Skisser kurvene gitt ved ligningene

- $r = 3$
- $r = 1$
- $\theta = 1$

- Hvordan vil du beskrive $y = x$ i polarkoordinater?
- Skisser $r = \cos\theta$ $(r \geq 0)$

Minner om

- Graf gitt ved ligningen $f(x, y) = 0$
- Da er grafen gitt ved $f(x - a, y - b) = 0$ den samme grafen, bare forskjøvet a til høyre og b opp.

Tangenter til polare kurver

Gitt

- polar kurve $r = f(\theta)$
- punkt P på kurven
- T tangent i punktet
- ψ vinkelen fra OP til T (om P)

Tangenter til polare kurver

Gitt

- polar kurve $r = f(\theta)$
- punkt P på kurven
- T tangent i punktet
- ψ vinkelen fra OP til T (om P)

Da har vi

- $\psi = \pi/2$ når $f'(\theta) = 0$
- hvis $f(\theta_0) = 0$ og kurven har tangent i θ_0 så er tangenten gitt ved ligningen $\theta = \theta_0$
- i alle andre tilfeller der det finnes en tangent har vi

$$\tan\psi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$