ØVING 7

6.8.9: Merk at $-1 \le -x^2 \le 0$ for $0 \le x \le 1$. Resten er identisk med eks. 4 s. 361

Får $|E_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$ og $\left| \int_0^1 E_n(-x^2)\,dx \right| \le \frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)} < 10^{-4}$,

som holder for $n = 6$.

Regn så ut $\int_0^1 \sum_{n=0}^{6} \frac{(-x^2)^n}{n!}\,dx$.

17.1.11: $((\cos x)'' = -\cos x$ og $(\sin x)'' = -\sin x$

Siden likninger er lineær, er $A\cos x + B\sin x$ løsning for alle A, B

(a) $A = -1$, $B = 1$

(b) $A = \sin 3$, $B = \cos 3$

(c) $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ er produkt av $\cos x$ og $\sin x$ og dermed ingen løsning

12: Tilsvarende argumentasjon som over.

17.3.1a+2a: Bør være greit ut fra eksempel 1 (s. 911) og 2 (s 913)

17.4.5: $y = x$ gir $y' = 1$ og $y'' = 0$

Sett $y = xv$ og regn ut $y' = v + xv'$, $y'' = 2v' + xv''$

Videre er da ved innsetting $x^3(v'' - v') = 0$ som har løsning $v = C_1 e^x + C_2$

Dermed er $y = C_1 x e^x + C_2 x$ generell løsning.

17.5.3: Tipper på $y = e^{rt}$ og får karakteristisk likning $r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2 = 0$,

altså dobbeltrøtter i $\pm i$

Ved Eulers formel er $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$, og vha (komplekse) lineærkombinasjoner

får vi (reelle) løsninger $y = C_1 \cos t + C_2 t \cos t + C_3 \sin t + C_3 t \sin t$

9: Vi tipper $y = x^r$, dvs $y' = r x^{r-1}$ og $y'' = r(r-1)x^{r-2}$.

Karakteristisk likning blir $r^2 - 1 = (r+1)(r-1) = 0$, altså $r = \pm 1$

Dermed er $y = C_1 x + C_2 \cdot \frac{1}{x}$

17.7.1: Anta $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$, dvs $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)(x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\,a_{n+2}\,(x-1)^n$

Merk: vi antar at rekken konvergerer s.a. vi kan utføre leddvis operasjoner

Vi får at $0 = y'' - (x-1)^2 y = 2a_2 + 6a_3(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-2}\right)(x-1)^n$

Altså er $a_2 = a_3 = 0$ og $a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$.

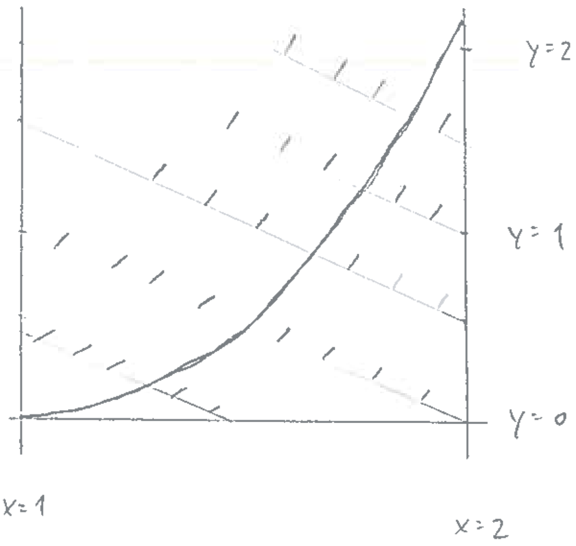
Vi trenger a_0 og a_1 for å bestemme $a_4, a_8, \ldots$ og $a_5, a_9, \ldots$

Dette er det viktigste, resten av oppgaven er (knotete) regning.

3+5: Samme metode (samle koeffisientene som tilhører samme eksponent).

Merk at hvis $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ så er $a_0 = y(0)$, $a_1 = y'(0)$, $a_2 = y''(0)$ osv.

(1)



Har tegnet linjene der stigningen er konstant (på formen $y = K - x$)

Estimat omtrent 2,2.

(2) Samme metode fungerer, evt kan Eulers metode brukes.

Fordelen med Eulers metode er at man har bedre kontroll på feilen.

Men det betyr ikke at man nødvendigvis får et bedre estimat.

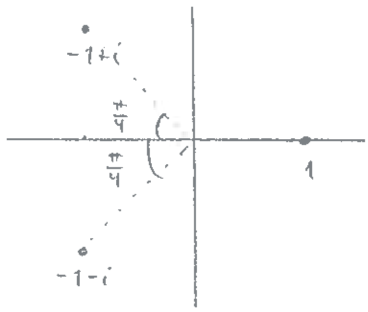
Jeg fikk estimatet $y(1) \approx 1{,}4$.

(3) Tar den nederste: $z^3 + z^2 - 2 = (z^2 + 2z + 2)(z-1)$ med røtter $1, -1 \pm i$

Lengden til $-1 \pm i$ er $\sqrt{2}$ og vinkelen må tilfredsstille $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,

altså $\theta = \pi \mp \frac{\pi}{4}$, og $-1 \pm i = \sqrt{2}e^{i(\pi \mp \frac{\pi}{4})}$.

For reelle tall blir $\theta = 0$.



Likningen $z^2 + 2z + 3$ har røtter $-1 \pm i\sqrt{2}$

og vi regner ut på samme måte som over at

$r = \sqrt{3}$

$\theta = \pi \mp \arctan(\sqrt{2})$